Universidade Federal de Sergipe

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Programa de Pós–Graduação em Matemática

Mestrado em Matemática

Propriedades de Soluções para as Equações de Navier-Stokes, MHD e Magneto-micropolares

Taynara Batista de Souza

São Cristóvão – SE
Fevereiro de 2016

Universidade Federal de Sergipe

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Programa de Pós–Graduação em Matemática

Mestrado em Matemática

Propriedades de Soluções para as Equações de Navier-Stokes, MHD e Magneto-micropolares

por

Taynara Batista de Souza

sob a orientação do

Prof. Dr. Wilberclay Gonçalves Melo

São Cristóvão – SE
Fevereiro de 2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

S729p Souza, Taynara Batista de
Propriedades de soluções para as equações de Navier-Stokes, MHD e magneto-micropolares / Taynara Batista de Souza ; orientador Wilberclay Gonçalves Melo. – São Cristóvão, 2016.
145 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, 2016.

1. Navier-Stokes, equações de. 2. Magnetoidrodinâmica. 3. Sobolev, Espaços de. l. Melo, Wilberclay Gonçalves, orient. II. Título.

CDU 517.912:537.84

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Propriedades de Soluções para as Equações de Navier-Stokes, MHD e Magneto-micropolares

por

Taynara Batista de Souza

Aprovada pela banca examinadora:

Wilberclay Gonçalves Melo

Prof. Dr. Wilberclay Gonçalves Melo - UFS
Orientador

Paulo R. A. Zingano

Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano - UFRGS
Primeiro Examinador

Manassés Xavier de Souza

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza - UFPB
Segundo Examinador

São Cristóvão, 18 de fevereiro de 2016

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Aos meus pais

Agradecimentos

Aos meus pais, pelo dom da vida.

Ao meu noivo, Reinaldo, pessoa com quem amo estar. Obrigada pelo carinho, compreensão e capacidade de me fazer feliz.

Ao meu orientador, Wilberclay, por toda força e amizade. Meu maior exemplo de caráter e sabedoria.

A todos os professores que me acompanharam até aqui, em especial, aos professores Paulo Rabelo e Ivanete Batista, por todos os ensinamentos, toda ajuda e pizzas compartilhadas.

Aos meus amigos Suelen Cristina, Alan Gois e Natã Firmino, por todo conhecimento partilhado, pelos momentos tristes e alegres desde a graduação. A vida que escolhemos não é fácil! Não esquecendo de todos os outros companheiros de luta: Diego, Izabela, Jonisson (Laranja) e Thiago.

Aos professores Paulo Zingano e Manasses Xavier por aceitarem compor a banca examinadora.

A Fundação de Apoio à Pesquisa e à Inovação Tecnológica do Estado de Sergipe (FAPITEC/SE) pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, discutimos inicialmente resultados de explosão no tempo $T^* < \infty$ para a solução $(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)$ (definida em $[0, T^*)$), como também para as suas derivadas, do sistema Magnetohidrodinâmico (MHD). Estes foram obtidos por uma extensão de resultados similares encontrados para as clássicas equações de Navier-Stokes. Em ordem a citarmos um exemplo, provamos que $\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_q$ explode a uma taxa $(T^* - t)^{-\frac{q-3}{2q}}$, para todo $t \in [0, T^*)$ e $3 < q < \infty$. Em seguida, avaliamos algumas condições suficientes para a existência de solução global no tempo para as equações de Navier-Stokes e MHD. Por fim, generalizamos observações de explosão, também em tempo finito, da solução das equações MHD, envolvendo espaços de Sobolev Homogêneos, para o sistema Magneto-micropolar. Mais precisamente, provamos que se a solução $(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, t)$ apresenta explosão em $T^* < \infty$, então $\|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_{\dot{H}^s} \|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_2^{\frac{2s}{1+2\delta}-1}$ é limitado inferiormente por $C(T^* - t)^{\frac{s\delta}{1+2\delta}}$, para todo $t \in [0, T^*)$, se $\delta \in (0, 1)$ e $s \geq \frac{1}{2} + \delta$.

Palavras-chave: Equações de Navier-Stokes; Equações MHD; Equações Magneto-micropolares; Explosão de Solução.

Abstract

In this work, we study blow-up results in finite time for the solution $(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)$ (defined in $[0,T^*))$, as well as for their spacial derivatives, of the Magnetohydrodynamic (MHD) system. These results are obtained by extending some statements found in the literature for the classical Navier-Stokes equations. In order to cite an example, we prove that $\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q$ explodes at a rate $(T^*-t)^{-\frac{q-3}{2q}}$, for all $t\in[0,T^*)$ and $3<q<\infty$. In addition, we prove some sufficient conditions for the existence of global solution (in time) for the Navier-Stokes and MHD equations. Finally, we generalize some results established from the MHD equations, involving Sobolev Spaces Homogeneous, to the Magneto-micropolar system. More precisely, we show that if the solution $(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)$ presents blow-up in $T^*<\infty$, then $\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_{\dot{H}^s}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2^{\frac{2s}{1+2\delta}-1}\geq C(T^*-t)^{\frac{s\delta}{1+2\delta}}$, for all $t\in[0,T^*)$, where $\delta\in(0,1)$ and $s\geq\frac{1}{2}+\delta$.

Keywords: Navier-Stokes Equations; MHD Equations; Magneto-micropolar Equations; Blow-up of Solution.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, derivamos propriedades de solução para o seguinte sistema de equações *magneto-micropolar* incompressível:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \nabla(p+\frac{1}{2}|\,\mathbf{b}\,|^2) = (\mu+\chi)\Delta\mathbf{u} + \mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b} + \chi\,\nabla\times\mathbf{w}, \\ \mathbf{w}_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{w} = \gamma\,\Delta\mathbf{w} + \kappa\,\nabla(\nabla\cdot\mathbf{w}) + \chi\nabla\times\mathbf{u} - 2\chi\,\mathbf{w}, \\ \mathbf{b}_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b} = \nu\,\Delta\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}, \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = \nabla\cdot\mathbf{b} = 0, \\ \mathbf{u}(\cdot,0) = \mathbf{u}_0,\ \mathbf{w}(\cdot,0) = \mathbf{w}_0,\ \mathbf{b}(\cdot,0) = \mathbf{b}_0, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = (u_1(\mathbf{x},t), u_2(\mathbf{x},t), u_3(\mathbf{x},t)) \in \mathbb{R}^3$ denota o campo velocidade incompressível, $\mathbf{w}(\mathbf{x},t) = (w_1(\mathbf{x},t), w_2(\mathbf{x},t), w_3(\mathbf{x},t)) \in \mathbb{R}^3$ descreve a velocidade micro-rotacional, $\mathbf{b}(\mathbf{x},t) = (b_1(\mathbf{x},t), b_2(\mathbf{x},t), b_3(\mathbf{x},t)) \in \mathbb{R}^3$ o campo magnético e $p(\mathbf{x},t) \in \mathbb{R}$ a pressão. As constantes positivas μ, χ, ν, κ, e γ estão associadas a propriedades específicas do fluido; mais precisamente, μ é a viscosidade cinemática, χ é a viscosidade do vórtice, κ e γ são as viscosidades de rotação e, por último, ν^{-1} é o número magnético de Reynolds. Os dados iniciais para os campos velocidade e magnéticos, dados por $\mathbf{u}_0$ e $\mathbf{b}_0$ em (1), são assumidos livres de divergente, i.e., $\nabla\cdot\mathbf{u}_0 = \nabla\cdot\mathbf{b}_0 = 0$.

O problema de existência de solução forte para o sistema magneto-micropolar (1) foi discutido por J. Yuan [48] em 2008. Tal artigo garante a existência de solução (única) $(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t) \in C([0,T^*); H^{s_0}(\mathbb{R}^3)) \cap C^1((0,T^*); H^{s_0}(\mathbb{R}^3)) \cap C((0,T^*); H^{s_0+2}(\mathbb{R}^3))$, definida no intervalo maximal $[0,T^*)$, com $0 < T^* \leq \infty$ dependendo dos parâmetros μ,χ,γ,κ e do dado inicial $(\mathbf{u}_0,\mathbf{w}_0,\mathbf{b}_0)$, através do teorema a seguir:

Teorema 0.1 (ver [48])**.** *As seguintes afirmações são válidas:*

1. (Existência local). *Seja $s_0 > \frac{3}{2}$. Assuma que $(\mathbf{u}_0,\mathbf{w}_0,\mathbf{b}_0) \in H^{s_0}(\mathbb{R}^3)$, com $\nabla\cdot\mathbf{u}_0 = \nabla\cdot\mathbf{b}_0 = 0$, então existe um instante positivo $T^* = T^*(\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{w}_0,\mathbf{b}_0)\|_{H^{s_0}})$, com $0 < T^* \leq \infty$, tal*

que existe uma única solução $(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t) \in C([0,T^*);H^{s_0}(\mathbb{R}^3)) \cap C^1((0,T^*);H^{s_0}(\mathbb{R}^3)) \cap C((0,T^*);H^{s_0+2}(\mathbb{R}^3))$ *para o sistema* (1).

2. (Critério de explosão). *Suponha que para* $s_0 > \frac{3}{2}$, $(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t) \in C([0,T^*);H^{s_0}(\mathbb{R}^3)) \cap C^1((0,T^*);H^{s_0}(\mathbb{R}^3)) \cap C((0,T^*);H^{s_0+2}(\mathbb{R}^3))$ *é uma solução suave para o sistema* (1). *Se existe uma constante absoluta* $M > 0$ *tal que*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\sup_{j\in\mathbb{Z}}\int_{T^*-\epsilon}^{T^*}\|\Delta_j(\nabla\times\mathbf{u})(\cdot,t)\|_\infty\,dt := \delta < M,$$

então $\delta = 0$, *e a solução pode ser estendida além de* $t = T^*$. *Se*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\sup_{j\in\mathbb{Z}}\int_{T^*-\epsilon}^{T^*}\|\Delta_j(\nabla\times\mathbf{u})(\cdot,t)\|_\infty\,dt \geq M,$$

então a solução $(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)$ *explode em* $t = T^*$.

Ver definição de Δ_j em [48].

Tal como acontece com as equações de Navier-Stokes (5), não sabemos se é verdade que $T^* < \infty$. De qualquer forma, é fácil ver que, pela primeira parte do Teorema 0.1, conclui-se $(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t) \in C^\infty(\mathbb{R}^3\times(0,T^*))$, com $(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t) \in C((0,T^*);H^s(\mathbb{R}^3))$ para qualquer $s \geq s_0$. Mas, a partir da desigualdade

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2 \leq \|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_2, \quad \forall\, 0 \leq t_0 \leq t < T^*, \tag{2}$$

ver Lema 3.1, obtem-se que $(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t) \in C([0,T^*);H^s(\mathbb{R}^3))$ para cada $0 \leq s \leq s_0$, pois

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_{\dot{H}^s} \leq \|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2^{1-\frac{s}{s_0}}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_{\dot{H}^{s_0}}^{\frac{s}{s_0}},$$

para cada s. Consequentemente, $\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_{H^s}$, $s \geq 0$, está bem definida para cada $0 < t < T^*$. Além disso, por aplicar a desigualdade (2) e o Teorema 0.1, chegamos a

$$\limsup_{t\nearrow T^*}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_{\dot{H}^{s_0}} = \infty, \quad T^* < \infty. \tag{3}$$

Em ordem a citar alguns outros resultados envolvendo existência de soluções para as equações magneto-micropolares, referimos [6, 27, 30, 36].

Apresentamos detalhadamente, a partir de agora, quais artigos foram estudados, e o que foi descoberto neste trabalho.

No Capítulo 2, exibimos detalhadamente alguns resultados que foram obtidos por J. Lorenz e P

R. Zingano [31] para as equações de Navier-Stokes (5) abaixo; como também, estendemos a maioria das informações estabelecidas neste mesmo artigo para o caso mais geral do sistema que descreve um fluido *magnetohidrodinâmico* (MHD), i.e.,

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla (p + \frac{1}{2}|\,\mathbf{b}\,|^2) = \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}, \\ \mathbf{b}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{b} = \nu\, \Delta \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0(\cdot), \;\; \mathbf{b}(\cdot, 0) = \mathbf{b}_0(\cdot). \end{cases} \tag{4}$$

É fácil ver que tal sistema é um derivativo das equações magneto-micropolares (1), basta considerar $\mathbf{w} = 0$ e $\chi = 0$.

Permita-nos discutir os resultados principais apresentados em [31], os quais foram estudados e estendidos nesta dissertação. Mais especificamente, J. Lorenz e P. R. Zingano [31] provaram algumas propriedades de soluções, em tempo de explosão, para as clássicas equações de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0(\cdot). \end{cases} \tag{5}$$

É importante ressaltar que, o sistema acima segue do fato de considerarmos o campo magnético $\mathbf{b}$ como sendo nulo em (4).

A primeira informação dada em [31] diz respeito à norma L^q do gradiente da solução $\mathbf{u}(\cdot, t)$ para o sistema de Navier-Stokes (5). Mais precisamente, temos o seguinte Teorema:

Teorema 0.2 (ver [31])**.** *Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ solução forte do sistema (5) definida no intervalo maximal $[0, T^*)$. Assuma que $T^* < \infty$, então os seguintes itens são válidos:*

i) *Seja $\frac{3}{2} < q \leq \infty$. Então,*

$$\sup_{0 \leq t < T^*} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_q = \infty. \tag{6}$$

ii) *Para cada $\frac{3}{2} < q \leq 3$, existe uma constante $C_q > 0$, independente de t e $\mathbf{u}_0$, tal que*

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_q \geq C_q (T^* - t)^{-\frac{q - \frac{3}{2}}{q}}, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*. \tag{7}$$

O Corolário 2.9 e a desigualdade (2.78) nos informam que é possível estender o Teorema 0.2

para o contexto das equações MHD (4) (o caso $q = 3$ é obtido a uma taxa $(T^* - t)^{-\frac{1}{2}+\epsilon}$ para $\epsilon > 0$ qualquer).

Teorema 0.3 (ver [31])**.** *Seja* $\mathbf{u}(\cdot, t)$ *solução forte do sistema* (5) *definida no intervalo maximal* $[0, T^*)$*. Assuma que* $T^* < \infty$ *e que* $3 \leq q \leq \infty$*, existe uma constante* $C_q > 0$*, independente de* t *e* $\mathbf{u}_0$ *tal que*

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_q \geq C_q (T^* - t)^{-k}, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*. \tag{8}$$

com

$$k = \frac{q-3}{2q} \quad se \quad 3 \leq q < \infty, \quad k = \frac{1}{2} \quad se \quad q = \infty. \tag{9}$$

Em particular, por (8) *e* (9)*, temos* $\lim\limits_{t \nearrow T^*} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_q = \infty$*, se* $T^* < \infty$*, para cada* $3 < q \leq \infty$*.*

Nesta dissertação, é provado que o Teorema 0.3 pode ser estendido, exceto $q = 3$ e $q = \infty$, em um caminho natural para o sistema MHD (4). Os casos $q = \infty$ e $q = 3$ não foram generalizados neste trabalho. O problema quanto ao caso $q = 3$ reside no fato que o limite

$$\lim_{t \nearrow T^*} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_3 = \infty, \quad T^* < \infty, \tag{10}$$

o qual foi provado por G. Seregin [42], parece não ter sido provado para o caso das equações MHD (4). O caso $q = \infty$ foi estabelecido por Leray [28]; assim sendo, como não tratamos este artigo aqui nesta dissertação, então foi decidido não acrescentarmos o caso em questão. Apesar disto, detalhamos estes dois casos específicos para as equações de Navier-Stokes (5). Para mais detalhes ver Teorema 2.6.

J. Lorenz e P. R. Zingano [31] também provaram o seguinte critério para garantia de existência global no tempo da solução no caso das equações de Navier-Stokes (5).

Teorema 0.4 (ver [31])**.** *Seja* $\mathbf{u}(\cdot, t)$ *solução forte do sistema* (5) *definida no intervalo maximal* $[0, T^*)$*. Assuma que* $3 \leq q \leq \infty$*. Então, se existe uma constante* $C_q > 0$ *apropriada, dependendo somente de* q*, tal que*

$$\|\mathbf{u}_0\|_2^{\frac{2q-6}{3q-6}} \|\mathbf{u}_0\|_q^{\frac{q}{3q-6}} < C_q, \tag{11}$$

tem-se $T^* = \infty$*.*

Pelos mesmos motivos expostos acima, estendemos o Teorema 0.4 para o caso do sistema MHD (4) no caso em que $3 < q < \infty$ (ver Corolário 2.13).

Por fim, um limite de explosão envolvendo a norma $\|D^n \mathbf{u}\|_q$ ($n \geq 2$ natural) foi encontrado em [31]. Mais precisamente, J. Lorenz e P. R. Zingano [31] demonstraram o seguinte teorema.

Teorema 0.5 (ver [31]). *Seja* $\mathbf{u}(\cdot,t)$ *solução forte do sistema* (5) *definida no intervalo maximal* $[0,T^*)$. *Seja* $n \geq 2$ *um número inteiro. Se* $T^* < \infty$, *então*

$$\lim_{t\nearrow T^*} \|D^n\mathbf{u}(\cdot,t)\|_q = \infty \tag{12}$$

para cada $1 \leq q \leq \infty$.

Somente o caso $q = 1$ e $n = 2$ do Teorema 0.5 não foi estendido, nesta dissertação, para o sistema MHD (4) (ver Corolário 2.15). Este problema também segue da ausência do limite (10) para as equações MHD (4).

Por fim, permita-nos listar alguns artigos que serviram de inspiração para a realização deste trabalho. Referimos a [1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 14, 16, 17, 18, 31, 24, 25, 28, 31, 32, 34, 39, 42, 44, 45, 46, 47, 50, 51] quando discutimos as equações de Navier-Stokes (5).

No Capítulo 3, estendemos os limites inferiores obtidos por D. Marcon, W. G. Melo, L. Schutz e J. S. Ziebell [12] a partir de uma solução do sistema MHD (4) para a solução do sistema de equações magneto-micropolar (1). Neste último artigo foi provado o seguinte resultado:

Teorema 0.6 (ver [12]). *Fixe* $s_0 > \frac{3}{2}$ *e seja* $(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0) \in H^{s_0}(\mathbb{R}^3)$ *tal que* $\nabla\cdot\mathbf{u}_0 = \nabla\cdot\mathbf{b}_0 = 0$. *Considere* $(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t) \in C([0,T^*),H^s(\mathbb{R}^3))$ *é a solução forte de* (4), *definida no intervalo maximal* $[0,T^*)$. *Se* $T^* < \infty$, *então*

i) *Para cada* $\delta \in (0,1)$ *e* $s \geq \frac{1}{2}+\delta$, *temos*

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_{\dot{H}^s}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2^{p(s,\delta)} \geq \frac{C_{s,\delta,\sigma}\lambda^{q(s,\delta)}}{(T^*-t)^{r(s,\delta)}}, \tag{13}$$

onde

$$p(s,\delta) := \frac{2s}{1+2\delta} - 1,\ q(s,\delta) := \frac{(2-\delta)s}{1+2\delta} \quad e \quad r(s,\delta) := \frac{s\delta}{1+2\delta}.$$

ii) *Para todo* $t \in [0,T^*)$, *tem-se*

$$\|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{b}})(\cdot,t)\|_1 \geq \frac{(2\pi)^3\lambda^{\frac{1}{2}}}{3\sqrt{6}}(T^*-t)^{-\frac{1}{2}}, \tag{14}$$

iii) *Para cada* $s > \frac{3}{2}$, *conclui-se*

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2^{\frac{2s}{3}-1}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_{\dot{H}^s} \geq \frac{C_{s,\sigma}\lambda^{\frac{s}{3}}}{(T^*-t)^{\frac{s}{3}}}, \tag{15}$$

onde $\lambda = \min\{\mu, \nu\}$.

A prova da extensão do Teorema 0.6 para o enredo das equações magneto-micropolares (1) é dada ao longo dos Teoremas 3.1, 3.5 e 3.6 abaixo. Em ordem a listar alguns outros trabalhos que estão diretamente relacionados às equações MHD (4), temos [8, 13, 22, 40, 41, 43, 49]. Em adição, é importante ressaltar que a famosa Desigualdade de Leray (ver [28])

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_2 \geq C(T^* - t)^{-\frac{1}{2}}, \tag{16}$$

é consequência imediata do Teorema 0.6 **i)**.

O esboço do restante do trabalho é dado como segue: no Capítulo 1, apresentamos as notações, as definições e os resultados básicos necessários para um bom entendimento do conteúdo; no Capítulo 2, acrescentamos as extensões obtidas a partir do artigo [31]; no Capítulo 3, colocamos as generalizações das afirmações dadas no artigo [12] e, por último, no Capítulo 4, provamos alguns resultados que foram aplicados nos Capítulos 2 e 3 desta dissertação.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, estamos interessados em estabelecer uma introdução para as notações, definições e alguns resultados (sem provas) que estão expostos ao longo do trabalho.

1.1 Notações e definições para o Capítulo 2

Nesta seção, apresentamos algumas notações, definições e alguns resultados que estão introduzidas no Capítulo 2.

- A norma Euclidiana de um vetor $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_N) \in \mathbb{R}^N$ é denotada e dada por

$$|\mathbf{a}|^2 = \sum_{i=1}^{N} a_i^2. \tag{1.1}$$

- Para uma aplicação f suficientemente diferenciável temos

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{3} D_i^2 f, \ \nabla f = (D_1 f, D_2 f, D_3 f) \ \text{ e } \ \nabla \cdot f = \sum_{i=1}^{3} D_i f_i. \tag{1.2}$$

- Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. A norma L^p de f é dada por

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |f(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty. \tag{1.3}$$

  Para $p = \infty$, temos

$$\|f\|_\infty = \text{supess}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} \{|f(\mathbf{x})|\}. \tag{1.4}$$

- Definimos o produto interno-L^2 $(\cdot,\cdot)_2$ entre duas funções vetoriais por

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})_2 := \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{a}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{b}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}, \tag{1.5}$$

  onde $\mathbf{c}\cdot\mathbf{d} := c_1d_1 + ... + c_Nd_N$ para $\mathbf{c} = (c_1,...,c_N), \mathbf{d} = (d_1,...,d_N) \in \mathbb{R}^N$; e $\mathbf{a},\mathbf{b} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^N$ $(N \in \mathbb{N})$ são funções mensuráveis.

- Para qualquer multi-índice $\boldsymbol{\alpha}$, temos

$$|\boldsymbol{\alpha}| = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i, \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3). \tag{1.6}$$

- Denotamos

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} D_3^{\alpha_3}, \tag{1.7}$$

  onde as derivadas parciais são dadas por

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1.8}$$

- Denotamos e definimos

$$\|(D^\alpha\mathbf{u}, D^\alpha\mathbf{b})\|_2^2 = \|D^\alpha\mathbf{u}\|_2^2 + \|D^\alpha\mathbf{b}\|_2^2 \tag{1.9}$$

  e também

$$\|\mathbf{u}\|_\infty = \max\{|u_i| : 1 \le i \le 3\}. \tag{1.10}$$

- Temos

$$J_n^2(t) = \sum_{|\alpha|=n} \|(D^\alpha\mathbf{u}, D^\alpha\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2^2, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \tag{1.11}$$

  onde

$$\|D^n\mathbf{u}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j_1=1}^{3}\cdots\sum_{j_n=1}^{3} |D_{j_1}\ldots D_{j_n}u_i(\mathbf{x})^p|\,d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty, \tag{1.12}$$

  e

$$\|D^n\mathbf{u}\|_\infty = \sup\{|D^\alpha u_i(\mathbf{x})| : \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3,\, 1 \le i \le 3,\, |\alpha| = n\}. \tag{1.13}$$

- Dadas duas aplicações f e g, definimos para cada $j \in \mathbb{N}$, o seguinte produto interno

$$(f,g)_{H^j} = \sum_{|\alpha|\le j} (D^\alpha f, D^\alpha g)_2. \tag{1.14}$$

Desse produto interno, para cada $j \in \mathbb{N}$, a norma H^j de uma função f é dada por

$$\|f\|_{H^j}^2 = \sum_{|\alpha| \leq j} \|D^\alpha f\|_2^2. \tag{1.15}$$

- Definimos a Transformada de Fourier de $\mathbf{u}$ por

$$\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) := (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

onde $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} := \sum_{j=1}^3 k_j x_j$, com $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ e $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

- Sejam f e g funções reais e p e q expoentes conjugados, $1 \leq p \leq \infty$. A Desigualdade de Hölder nos diz que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1.16}$$

- Dados dois números reais positivos a e b. Então,

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q, \tag{1.17}$$

onde p e q são expoentes conjugados. A desigualdade (1.17) é conhecida como Desigualdade de Young.

- Se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $v \in L^q(\mathbb{R}^N)$, então $u * v \in L^r(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|u * v\|_r \leq \|u\|_p \|v\|_q. \tag{1.18}$$

A desigualdade acima é conhecida como Desigualdade de Young para convoluções.

- Para $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $1 \leq p \leq 2$, temos

$$\|\widehat{f}\|_{p'} \leq C \|f\|_p, \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1. \tag{1.19}$$

Essa é a conhecida Desigualdade de Hausdorff-Young.

- Se f e g são funções diferenciáveis n-vezes, então a regra de Leibniz estabelece que a n-ésima derivada do produto fg é dada por

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}, \tag{1.20}$$

onde $\binom{n}{k}$ é o coeficiente binomial de Newton.

- Para qualquer $0 < s \le r \le \infty$, $1 \le p \le \infty$, temos

$$\|v\|_r \le C\|v\|_s^{1-\theta}\|\nabla v\|_p^{\theta}, \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \tag{1.21}$$

  onde C é uma constante positiva que depende de r, s, p, N; e θ satisfaz

$$\frac{1}{r} = \theta\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{N}\right) + (1-\theta)\frac{1}{s}.$$

  A desigualdade (1.21) é conhecida como Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (para mais detalhes ver [37]).

- Assuma que $m > n$. Então vale a seguinte desigualdade:

$$J_n^2(t) \le C_n(J_m^2(t) + J_0^2(t)), \quad \forall\, t \ge 0, \tag{1.22}$$

  onde C_n é uma constante positiva que depende somente de n. Sua prova é dada no apêndice do livro [26].

- Seja $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um dado campo vetorial. Então existe uma simples decomposição de v em um campo livre de divergente w e um campo gradiente $\nabla\phi$,

$$v = w - \nabla\phi, \quad \nabla \cdot w = 0. \tag{1.23}$$

  Então, em espaços de funções adequadas, a aplicação $v \to w := P_H v$ define o operador projeção P_H, chamado Projeção de Helmholtz. Um importante e não trivial resultado é a limitação de P_H em L^q para cada q com $1 < q < \infty$,

$$\|P_H v\|_q \le C_q\|v\|_q, \quad v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3), \tag{1.24}$$

  onde C_q é uma constante positiva que depende somente de q (para mais detalhes ver [11, 18, 29, 31]).

- As constantes, neste trabalho, podem mudar linha por linha, mas serão denotadas da mesma maneira. Colocaremos $C_{q,r,s}$ para denotar constantes que dependem de q, r e s, por exemplo. C será sempre constante positiva absoluta. Também, em alguns momentos, não nos preocuparemos com a notação de dependência em x e t, por exemplo, $\|\mathbf{u}\|_2$ ou $\|\mathbf{u}(t)\|_2$ significará $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_2$.

- Introduziremos algumas funções regularizantes que serão utilizadas no decorrer do trabalho.

Consideremos uma função $S \in C(\mathbb{R})$ tal que

$$\begin{cases} S'(v) \geq 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}; \\ S(0) = 0; \\ S(v) = \operatorname{sgn}(v), \quad |v| \geq 1 \end{cases}.$$

e para cada $\delta > 0$, construiremos a função regularizadora

$$S_\delta(v) := S\left(\frac{v}{\delta}\right)$$

e definiremos a função aproximação para $|u|$ por

$$L_\delta(u) := \int_0^u S\left(\frac{v}{\delta}\right)\, dv. \tag{1.25}$$

Observemos que, quando $\delta \to 0$, temos que $S\left(\frac{u}{\delta}\right) \to \operatorname{sgn}(u)$ e $L_\delta(u) \to |u|$, uniformemente em u. Além disso, dado $u \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$ fixo, temos

$$0 \leq L_\delta(u) \leq |u|; \tag{1.26}$$

$$L'_\delta(u) \leq C\frac{|u|}{\delta} \tag{1.27}$$

e também

$$0 \leq L''_\delta(u) \leq \frac{C}{\delta}. \tag{1.28}$$

Outra importante propriedade de $L_\delta(u)$ é

$$L_\delta(u) \cdot L''_\delta(u) \to 0, \quad \text{quando } \delta \to 0. \tag{1.29}$$

Definamos também a seguinte função auxiliar:

$$\Phi_\delta(u) := \begin{cases} u^2, & \text{se} \quad q = 2 \\ (L_\delta(u))^q, & \text{se} \quad q > 2, \end{cases}$$

onde $p_0 \leq q < \infty$. Para $q > 2$, temos

$$\Phi'_\delta(u) = q(L_\delta(u))^{q-1} L'_\delta(u) \tag{1.30}$$

e também

$$\Phi''_\delta(u) = q(q-1)(L_\delta(u))^{q-2}(L'_\delta(u))^2 + q(L_\delta(u))^{q-1} L''_\delta(u). \tag{1.31}$$

- Sejam $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1([0,T])$ e $g, h : [0,T] \to \mathbb{R}$ funções contínuas não negativas, onde $[0,T] \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo (com $T > 0$). Se

$$f'(t) \leq g(t)f(t) + h(t), \quad \forall\, t \in [0,T], \tag{1.32}$$

então

$$f(t) \leq \exp\left(\int_0^t g(\tau)\, d\tau\right)\left[f(0) + \int_0^t h(\tau)\, d\tau\right], \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{1.33}$$

Este é conhecido como o Lema de Gronwall, ver [15].

- A desigualdade abaixo é importante na prova do Lema 4.3. Seja $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, então

$$\|v\|_\infty \leq C\|v\|_{H^2}, \tag{1.34}$$

onde C é uma constante positiva. A prova da desigualdade acima é dada em [38].

1.2 Notações e definições para o Capítulo 3

Agora descreveremos as notações e definições que serão utilizadas no Capítulo 3. Algumas das definições e notações do Capítulo 2 continuam sendo válidas para este capítulo. Além disso, exibiremos (sem provas) dois resultados que serão utilizados neste trabalho.

- Para $s \in \mathbb{R}$, o espaço de Sobolev Homogêneo $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ é o espaço das aplicações $\mathbf{f}$ tais que

$$\|\mathbf{f}\|_{\dot{H}^s} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{k}|^{2s} |\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{k})|^2\, d\mathbf{k}} < +\infty, \tag{1.35}$$

onde $|\widehat{\mathbf{f}}|^2 = \sum_{i=1}^3 |\widehat{f}_i|^2$.

- Para $(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b}) \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, temos

$$\|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})\|_{\dot{H}^s} = \sqrt{\|\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}^2 + \|\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}^2 + \|\mathbf{b}\|_{\dot{H}^s}^2}. \tag{1.36}$$

- O produto interno-$\dot{H}^s$ é dado por

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})_{\dot{H}^s} = \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{k}|^{2s} \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}) \cdot \widehat{g}(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}. \tag{1.37}$$

onde $\widehat{\mathbf{f}} \cdot \widehat{\mathbf{g}} = \sum_{i=1}^3 \widehat{f}_i \overline{\widehat{g}_i}$.

- Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ definimos o produto tensorial $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ por

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} := (v_1\mathbf{u}, v_2\mathbf{u}, v_3\mathbf{u}). \tag{1.38}$$

- Seja $\varphi \in C^1[0, \infty)$. Sejam $y(t)$ e $y_0(t)$ funções de classe $C^1[0, \infty)$, não-negativas, definidas para todo $t \in [0, T]$. Se $y'(t) \leq \varphi(y(t))$, $y_0'(t) = \varphi(y_0(t)), \forall\, t \in [0, T]$ e $y(0) \leq y_0(0)$, então

$$y(t) \leq y_0(t), \quad \forall\, t \in [0, T]. \tag{1.39}$$

  Essa é uma versão não linear para o Lema de Gronwall (para mais detalhes ver [35]).

- Sejam η, η' dois números reais positivos tal que $\eta < \frac{3}{2}$ e $\eta + \eta' > 0$. Se $f, g \in \dot{H}^{\eta}(\mathbb{R}^3) \cap \dot{H}^{\eta'}(\mathbb{R}^3)$, então

$$\|fg\|_{\dot{H}^{\eta+\eta'-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C(\eta, \eta') \left(\|f\|_{\dot{H}^{\eta}(\mathbb{R}^3)} \|g\|_{\dot{H}^{\eta'}(\mathbb{R}^3)} + \|f\|_{\dot{H}^{\eta'}(\mathbb{R}^3)} \|g\|_{\dot{H}^{\eta}(\mathbb{R}^3)} \right), \tag{1.40}$$

  onde $C(\eta, \eta')$ é uma constante positiva que depende somente de η e η'. Além disso, se $\eta' < \frac{3}{2}$, então

$$\|fg\|_{\dot{H}^{\eta+\eta'-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C(\eta, \eta') \|f\|_{\dot{H}^{\eta}(\mathbb{R}^3)} \|g\|_{\dot{H}^{\eta'}(\mathbb{R}^3)}, \tag{1.41}$$

  para mais detalhes ver [4, 9].

Capítulo 2

Propriedades de Soluções para as Equações MHD

2.1 Limitação da Norma do Sup Implica Limitação das Derivadas na Norma L^2

Nesta seção, supondo que o supremo $\sup_{0 \leq t < T} \|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_\infty$ é finito, estamos interessados em provar a seguinte limitação:

$$\|(D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{b})(\cdot, t)\|_2 \leq K_n, \quad \forall\, 0 \leq t < T,$$

qualquer que seja α multi-índice tal que $|\alpha| = n$ ($n \in \mathbb{N}$). Para este fim, vamos provar o resultado a seguir, o qual garante um resultado de desigualdade de energia para uma solução de (4).

Lema 2.1. *Seja* $(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)$ *solução forte do sistema* (4) *definida no intervalo maximal* $[0, T^*)$. *Portanto,*

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_2^2 \leq -\gamma \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot, t)\|_2^2, \quad \forall\ 0 \leq t < T^*. \tag{2.1}$$

Em particular,

$$\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_2 \leq \|(\mathbf{u}_0, \mathbf{b}_0)\|_2 \ \textit{e} \ \int_0^t \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot, s)\|_2^2 ds \leq \frac{1}{2\gamma} \|(\mathbf{u}_0, \mathbf{b}_0)\|_2^2, \tag{2.2}$$

para todo $0 \leq t < T^*$. *Aqui* $\gamma = \min\{\mu, \nu\}$.

Demonstração. Primeiramente, notemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}J_0^2(t) := \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2^2 \;=\; \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{b}(\cdot,t)\|_2^2, \tag{2.3}$$

para todo $0 \leq t < T^*$. Agora, realizando o produto interno $(\mathbf{u},\cdot)_2$ na primeira equação do sistema (4), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|_2^2 &= (\mathbf{u},\mathbf{u}_t)_2\\ &= \mu(\mathbf{u},\Delta\mathbf{u})_2 - (\mathbf{u},\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})_2 + (\mathbf{u},\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})_2 - (\mathbf{u},\nabla(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2))_2. \end{aligned}\tag{2.4}$$

Permita-nos analisar algumas das parcelas encontradas no lado direito das igualdades acima. Assim sendo, usando integração por partes, é fácil concluir que

$$(\mathbf{u},\Delta\mathbf{u})_2 := \sum_{i=1}^{3}(\mathbf{u},D_i^2\mathbf{u})_2 = -\sum_{i=1}^{3}(D_i\mathbf{u},D_i\mathbf{u})_2 = -\|D\mathbf{u}\|_2^2 \tag{2.5}$$

e também

$$\begin{aligned}(\mathbf{u},\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})_2 &= \sum_{i=1}^{3}(\mathbf{u},u_iD_i\mathbf{u})_2\\ &= -\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{u},D_i(u_i\mathbf{u}))_2\\ &= -\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{u},(D_iu_i)\mathbf{u}+u_i(D_i\mathbf{u}))_2\\ &= -(\mathbf{u},(\nabla\cdot\mathbf{u})\mathbf{u})_2 - \sum_{i=1}^{3}(\mathbf{u},u_iD_i\mathbf{u})_2\\ &= -\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{u},u_iD_i\mathbf{u})_2\\ &= -(\mathbf{u},\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})_2, \end{aligned}\tag{2.6}$$

onde na quinta igualdade utilizamos o fato $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$ (ver (4)). Consequentemente, $(\mathbf{u},\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})_2 = 0$. Além disso, também por integração por partes, encontramos

$$\begin{aligned}(\mathbf{u},\nabla(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2))_2 &= \sum_{i=1}^{3}(u_i,D_i(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2))_2 \;=\; -\sum_{i=1}^{3}(D_iu_i,p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)_2\\ &= -(\nabla\cdot\mathbf{u},p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)_2 \;=\; 0, \end{aligned}\tag{2.7}$$

desde que $\mathbf{u}$ é livre de divergente. Por substituir os resultados obtidos em (2.5), (2.6) e (2.7) em (2.4), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|_2^2 + \mu\|D\mathbf{u}\|_2^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})_2. \tag{2.8}$$

Agora vamos analisar o termo em (2.3) envolvendo a derivada do campo magnético. Aplicando o produto interno $(\mathbf{b},\cdot)_2$ à segunda equação do sistema (4), inferimos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{b}\|_2^2 &= (\mathbf{b}, \mathbf{b}_t)_2 \\ &= \nu(\mathbf{b}, \Delta\mathbf{b})_2 - (\mathbf{b}, \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b})_2 + (\mathbf{b}, \mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u})_2. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Analogamente ao que foi feito em (2.5), chegamos a

$$(\mathbf{b}, \Delta\mathbf{b})_2 = -\|D\mathbf{b}\|_2^2, \tag{2.10}$$

desde que $\nabla\cdot\mathbf{b} = 0$. Notemos ainda que,

$$\begin{aligned}(\mathbf{b}, \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b})_2 &= \sum_{i=1}^{3}(\mathbf{b}, u_i D_i\mathbf{b})_2 \\ &= -\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{b}, D_i(u_i\mathbf{b}))_2 \\ &= -\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{b}, (D_iu_i)\mathbf{b} + u_i(D_i\mathbf{b}))_2 \\ &= -(\mathbf{b}, (\nabla\cdot\mathbf{u})\mathbf{b})_2 - (\mathbf{b}, \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b})_2 \\ &= -(\mathbf{b}, \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b})_2, \end{aligned} \tag{2.11}$$

onde usamos o fato que $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$ na última igualdade. Daí, $(\mathbf{b}, \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}) = 0$. Assim, substituindo (2.10) e (2.11) em (2.9), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{b}\|_2^2 + \nu\|D\mathbf{b}\|_2^2 = (\mathbf{b}, \mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u})_2. \tag{2.12}$$

Por fim, somando as igualdades (2.8) e (2.12), encontramos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}J_0^2(t) + \mu\|D\mathbf{u}\|_2^2 + \nu\|D\mathbf{b}\|_2^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})_2 + (\mathbf{b}, \mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u})_2, \tag{2.13}$$

ver definição (1.11).

A seguir vamos provar que o lado direito da igualdade (2.13) é nulo. Com efeito,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}, \mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})_2 + (\mathbf{b}, \mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u})_2 &= \sum_{i=1}^{3}(\mathbf{u}, b_i D_i \mathbf{b})_2 + \sum_{i=1}^{3}(\mathbf{b}, b_i D_i \mathbf{u})_2 \\
&= -\sum_{i=1}^{3}(D_i(b_i\mathbf{u}), \mathbf{b})_2 + \sum_{i=1}^{3}(\mathbf{b}, b_i D_i \mathbf{u})_2 \\
&= -\sum_{i=1}^{3}((D_i b_i)\mathbf{u} + b_i(D_i\mathbf{u}), \mathbf{b})_2 + \sum_{i=1}^{3}(\mathbf{b}, b_i D_i \mathbf{u})_2 \\
&= -\sum_{i=1}^{3}((\nabla\cdot\mathbf{b})\mathbf{u}, \mathbf{b})_2 - \sum_{i=1}^{3}(b_i D_i\mathbf{u}, \mathbf{b})_2 + \sum_{i=1}^{3}(\mathbf{b}, b_i D_i \mathbf{u})_2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois $\mathbf{b}$ é livre de divergente. Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}J_0^2(t) + \mu\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_2^2 + \nu\|D\mathbf{b}(\cdot,t)\|_2^2 = 0, \quad 0 \le t < T^*.$$

Se considerarmos que $\gamma = \min\{\mu, \nu\} > 0$ é possível obter

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}J_0^2(t) + \gamma(\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_2^2 + \|D\mathbf{b}(\cdot,t)\|_2^2) \le 0, \quad 0 \le t < T^*,$$

ou equivalentemente, por (1.11),

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}J_0^2(t) \le -\gamma J_1^2(t), \quad \forall\ 0 \le t < T^*. \tag{2.14}$$

A desigualdade acima prova (2.1).

Agora, verifiquemos que (2.2) vale. De fato, integrando de 0 a t ($t \in [0, T^*)$) a desigualdade (2.14), chegamos, através do Teorema Fundamental do Cálculo, a

$$\frac{1}{2}J_0^2(t) - \frac{1}{2}J_0^2(0) \le -\gamma\int_0^t J_1^2(s)ds \le 0. \tag{2.15}$$

Deste modo,

$$J_0(t) \le \|(\mathbf{u}_0, \mathbf{b}_0)\|_2, \quad \forall\ 0 \le t < T^*,$$

ver (1.11). Analisando (2.15) de outra maneira, podemos alcançar as seguintes desigualdades:

$$-\|(\mathbf{u}_0, \mathbf{b}_0)\|_2^2 \le J_0^2(t) - \|(\mathbf{u}_0, \mathbf{b}_0)\|_2^2 \le -2\gamma\int_0^t J_1^2(s)ds.$$

Com isso,

$$\int_0^t J_1^2(s)ds \leq \frac{1}{2\gamma}\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2^2, \quad \forall\ 0 \leq t < T^*,$$

o que prova (2.2). Por conseguinte, finalizamos a prova do Lema 2.1. □

Usando o Lema 2.1, vamos mostrar que quando é possível limitar, em algum intervalo de tempo, a norma do sup da solução dada pelo sistema (4), inferimos uma limitação para todas as derivadas espacias na norma L^2 desta mesma solução no mesmo intervalo de tempo. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.1. *Seja* $(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)$ *solução forte do sistema* (4) *definida no intervalo maximal* $[0,T^*)$. *Assuma que*

$$\sup_{0\leq t<T}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_\infty < \infty. \tag{2.16}$$

Então,

$$J_n(t) \leq K_n, \quad \forall\ 0 \leq t < T \ \ e\ n \in \mathbb{N},$$

onde K_n *é uma constante positiva que depende somente de* n, $\sup\limits_{0\leq t<T}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_\infty, T, \mu, \nu$ *e* $\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_{H^n}$.

Demonstração. A prova deste resultado é feita por indução sobre n. Primeiramente, segue das definições (1.11) e (1.9), que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}J_n^2(t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{|\alpha|=n}\|(D^\alpha\mathbf{u},D^\alpha\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2^2\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{|\alpha|=n}\|D^\alpha\mathbf{u}(\cdot,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{|\alpha|=n}\|D^\alpha\mathbf{b}(\cdot,t)\|_2^2,\end{aligned}$$

para todo $0 \leq t < T$ e $n \in \mathbb{N}$. Permita-nos examinar as duas somas do lado direito da igualdade acima separadamente. Assim sendo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{|\alpha|=n}\|D^\alpha\mathbf{u}\|_2^2 &= \sum_{|\alpha|=n}(D^\alpha\mathbf{u},D^\alpha\mathbf{u}_t)_2\\ &= \sum_{|\alpha|=n}[\mu(D^\alpha\mathbf{u},D^\alpha\Delta\mathbf{u})_2 - (D^\alpha\mathbf{u},D^\alpha(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}))_2 + (D^\alpha\mathbf{u},D^\alpha(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2\\ &\quad - (D^\alpha\mathbf{u},D^\alpha(\nabla(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)))_2].\end{aligned} \tag{2.17}$$

Nosso intuito agora é estudar alguns dos termos do lado direito das igualdades acima. Portanto, use integração por partes em ordem a obter

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|=n}(D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha \Delta \mathbf{u})_2 &= \sum_{|\alpha|=n}\sum_{i=1}^{3}(D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha D_i^2 \mathbf{u})_2 \\
&= -\sum_{|\alpha|=n}\sum_{i=1}^{3}(D_i D^\alpha \mathbf{u}, D_i D^\alpha \mathbf{u})_2 \\
&= -\sum_{|\beta|=n+1}\|D^\beta \mathbf{u}\|_2^2. \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Integrando por partes e usando o fato que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, encontramos

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|=n}(D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha(\nabla(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)))_2 &= \sum_{|\alpha|=n}\sum_{i=1}^{3}(D^\alpha u_i, D^\alpha D_i(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2))_2 \\
&= -\sum_{|\alpha|=n}\sum_{i=1}^{3}(D^\alpha D_i u_i, D^\alpha(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2))_2 \\
&= -\sum_{|\alpha|=n}(D^\alpha(\nabla\cdot\mathbf{u}), D^\alpha(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2))_2 \\
&= 0. \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Daí, substituindo (2.18) e (2.19) em (2.17), inferimos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{|\alpha|=n}\|D^\alpha \mathbf{u}\|_2^2 + \mu\sum_{|\beta|=n+1}\|D^\beta \mathbf{u}\|_2^2 = \sum_{|\alpha|=n}[-(D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}))_2 + (D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2]. \quad (2.20)$$

Similarmente a (2.18), podemos demonstrar que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{|\alpha|=n}\|D^\alpha \mathbf{b}\|_2^2 &= \sum_{|\alpha|=n}(D^\alpha \mathbf{b}, D^\alpha \mathbf{b}_t)_2 \\
&= \sum_{|\alpha|=n}[\nu(D^\alpha \mathbf{b}, D^\alpha(\Delta\mathbf{b}))_2 - (D^\alpha \mathbf{b}, D^\alpha(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2 + (D^\alpha \mathbf{b}, D^\alpha(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}))_2] \\
&= -\nu\sum_{|\beta|=n+1}\|D^\beta \mathbf{b}\|_2^2 + \sum_{|\alpha|=n}[-(D^\alpha \mathbf{b}, D^\alpha(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2 + (D^\alpha \mathbf{b}, D^\alpha(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}))_2],
\end{aligned}$$

isto equivale a,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{|\alpha|=n}\|D^\alpha \mathbf{b}\|_2^2 + \nu\sum_{|\beta|=n+1}\|D^\beta \mathbf{b}\|_2^2 = \sum_{|\alpha|=n}[-(D^\alpha \mathbf{b}, D^\alpha(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2 + (D^\alpha \mathbf{b}, D^\alpha(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}))_2]. \quad (2.21)$$

Somando as igualdades (2.20) e (2.21), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}J_n^2(t) + \mu \sum_{|\beta|=n+1} \|D^\beta \mathbf{u}\|_2^2 + \nu \sum_{|\beta|=n+1} \|D^\beta \mathbf{b}\|_2^2 = \sum_{|\alpha|=n} [-(D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}))_2$$
$$+ (D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2 - (D^\alpha \mathbf{b}, D^\alpha(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2 + (D^\alpha \mathbf{b}, D^\alpha(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}))_2].$$

Assumindo que $\gamma := \min\{\mu, \nu\}$, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}J_n^2(t) + \gamma J_{n+1}^2(t) \leq S_n(t), \tag{2.22}$$

onde

$$S_n(t) := \sum_{|\alpha|=n} [-(D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}))_2 + (D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2 - (D^\alpha \mathbf{b}, D^\alpha(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2 + (D^\alpha \mathbf{b}, D^\alpha(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}))_2].$$

Agora estamos aptos a provar que $J_n(t)$ é limitado em $[0, T)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Comecemos estimando $J_1(t)$ em $[0, T)$. Para este fim, a desigualdade (2.22) nos diz que é suficiente estimar $S_1(t)$. Mais minuciosamnete, conferindo a definição de $S_1(t)$, vemos que a limitação de $J_1(t)$ segue da parcela $(D\mathbf{u}, D(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2$, já que os demais termos que definem $S_1(t)$ contribuem de maneira semelhante nas estimativas que seguem. Com isso exposto, note que

$$\begin{aligned}
(D\mathbf{u}, D(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2 &= \sum_{i=1}^{3}(D\mathbf{u}, D(b_i D_i \mathbf{b}))_2 \\
&= \sum_{i=1}^{3}(D\mathbf{u}, Db_i D_i \mathbf{b})_2 + \sum_{i=1}^{3}(D\mathbf{u}, b_i DD_i \mathbf{b})_2 \\
&= -\sum_{i=1}^{3}(D_i(D\mathbf{u}Db_i), \mathbf{b})_2 + \sum_{i=1}^{3}(D\mathbf{u}, b_i DD_i \mathbf{b})_2 \\
&= -\sum_{i=1}^{3}((D_i D\mathbf{u})Db_i, \mathbf{b})_2 - \sum_{i=1}^{3}(D\mathbf{u}DD_i b_i, \mathbf{b})_2 + \sum_{i=1}^{3}(D\mathbf{u}, b_i DD_i \mathbf{b})_2 \\
&= -\sum_{i=1}^{3}((D_i D\mathbf{u})Db_i, \mathbf{b})_2 - (D\mathbf{u}D(\nabla\cdot\mathbf{b}), \mathbf{b})_2 + \sum_{i=1}^{3}(D\mathbf{u}, b_i DD_i \mathbf{b})_2 \\
&= -\sum_{i=1}^{3}((D_i D\mathbf{u})Db_i, \mathbf{b})_2 + \sum_{i=1}^{3}(D\mathbf{u}, b_i DD_i \mathbf{b})_2,
\end{aligned}$$

pois $\nabla\cdot\mathbf{b} = 0$. Assim, é suficiente analisarmos os termos da forma $(D\mathbf{b}, \mathbf{b}D^2\mathbf{u})_2$ e $(D\mathbf{u}, \mathbf{b}D^2\mathbf{b})_2$.

Vejamos que, pela Desigualdade de Hölder, (1.11) e (2.16), temos

$$|(D\mathbf{b}, \mathbf{b}D^2\mathbf{u})_2| \leq \|\mathbf{b}\|_\infty \|D\mathbf{b}\|_2 \|D^2\mathbf{u}\|_2 \leq MJ_1(t)J_2(t),$$

onde $M = \sup_{0 \leq t < T} \|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_\infty$. Analogamente,

$$|(D\mathbf{u}, \mathbf{b}D^2\mathbf{b})_2| \leq MJ_1(t)J_2(t).$$

Daí,

$$|(D\mathbf{u}, D(\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}))_2| \leq CMJ_1(t)J_2(t).$$

Do mesmo modo,

$$|(D\mathbf{u}, D(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}))_2|, |(D\mathbf{b}, D(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{b}))_2|, |(D\mathbf{b}, D(\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u}))_2| \leq CMJ_1(t)J_2(t).$$

Com isso, a partir de (2.22) e Desigualdade de Young (1.17), chegamos a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}J_1^2(t) + \gamma J_2^2(t) \leq MJ_1(t)J_2(t) \leq CM\gamma^{-1}J_1^2(t) + \frac{1}{2}\gamma J_2^2(t).$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}J_1^2(t) + \frac{\gamma}{2}J_2^2(t) \leq CM\gamma^{-1}J_1^2(t).$$

Assim, pelo Lema de Gronwall, ver (1.33), encontramos

$$\begin{aligned} J_1^2(t) &\leq \exp\{CM\gamma^{-1}t\}J_1^2(0) \\ &\leq \exp\{CM\gamma^{-1}T\} \sum_{|\alpha|=1} \|(D^\alpha \mathbf{u}_0, D^\alpha \mathbf{b}_0)\|_2^2 \\ &\leq \exp\{CM\gamma^{-1}T\}\|(\mathbf{u}_0, \mathbf{b}_0)\|_{H^1}^2, \end{aligned}$$

para todo $0 \leq t < T$. Portanto, $J_1(t)$ está limitada em $[0, T)$ por uma constante

$$K_1 := \exp\{CM\gamma^{-1}T\}\|(\mathbf{u}_0, \mathbf{b}_0)\|_{H^1}$$

que depende somente de M, T, μ, ν e $\|(\mathbf{u}_0, \mathbf{b}_0)\|_{H^1}$.

Agora vejamos que $J_2(t)$ é limitada em $0 \leq t < T$ (esta limitação é importante para a utilização da hipótese de indução a seguir). Por (2.22), temos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}J_2^2(t) + \gamma J_3^2(t) \leq S_2(t).$$

Para estimar $S_2(t)$ é necessário encontrar uma limitação para o termo $(D^2\mathbf{u}, D^2(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2$, desde que as outras parcelas de $S_2(t)$ seguem de modo análogo.

A Regra de Leibniz para derivadas nos informa que

$$\begin{aligned}
(D^2\mathbf{u}, D^2(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2 &= \sum_{i=1}^{3}(D^2\mathbf{u}, D^2(b_iD_i\mathbf{b}))_2 \\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}(D^2\mathbf{u}, D^jb_iD^{2-j}D_i\mathbf{b})_2 \\
&= \sum_{i=1}^{3}\Big[\binom{2}{0}(D^2\mathbf{u}, b_iD^2D_i\mathbf{b})_2 + \binom{2}{1}(D^2\mathbf{u}, Db_iDD_i\mathbf{b})_2 + \binom{2}{2}(D^2\mathbf{u}, D^2b_iD_i\mathbf{b})_2\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{3}\Big[\binom{2}{0}(D^2D_i\mathbf{b}, b_iD^2\mathbf{u})_2 - \binom{2}{1}(D(D^2\mathbf{u}DD_i\mathbf{b}), b_i)_2 - \binom{2}{2}(D_i(D^2\mathbf{u}D^2b_i), \mathbf{b})_2\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{3}\Big[\binom{2}{0}(D^2D_i\mathbf{b}, b_iD^2\mathbf{u})_2 - \binom{2}{1}\Big[(D^3\mathbf{u}, b_iDD_i\mathbf{b})_2 + (D^2D_i\mathbf{b}, b_iD^2\mathbf{u})_2\Big] \\
&\quad - \binom{2}{2}(D_iD^2\mathbf{u}, \mathbf{b}D^2b_i)_2\Big] - \binom{2}{2}(D^2\mathbf{u}D^2(\nabla\cdot\mathbf{b}), \mathbf{b})_2 \\
&= \sum_{i=1}^{3}\Big[\binom{2}{0}(D^2D_i\mathbf{b}, b_iD^2\mathbf{u})_2 - \binom{2}{1}\Big[(D^3\mathbf{u}, b_iDD_i\mathbf{b})_2 + (D^2D_i\mathbf{b}, b_iD^2\mathbf{u})_2\Big] \\
&\quad - \binom{2}{2}(D_iD^2\mathbf{u}, \mathbf{b}D^2b_i)_2\Big],
\end{aligned}$$

pois $\nabla\cdot\mathbf{b} = 0$. Assim, é suficiente analisarmos os termos da forma $(D^3\mathbf{b}, \mathbf{b}D^2\mathbf{u})$ e $(D^3\mathbf{u}, \mathbf{b}D^2\mathbf{b})$. Pela Desigualdade de Hölder e hipótese (2.16), chegamos a

$$|(D^3\mathbf{b}, \mathbf{b}D^2\mathbf{u})_2| \le \|\mathbf{b}\|_\infty\|D^3\mathbf{b}\|_2\|D^2\mathbf{u}\|_2 \le MJ_2(t)J_3(t).$$

Analogamente,

$$|(D^3\mathbf{u}, \mathbf{b}D^2\mathbf{b})_2| \le MJ_2(t)J_3(t).$$

Daí,

$$|(D^2\mathbf{u}, D^2(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2| \le CMJ_2(t)J_3(t).$$

Do mesmo modo,

$$|(D^2\mathbf{u}, D^2(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}))_2|, |(D^2\mathbf{b}, D^2(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2|, |(D^2\mathbf{b}, D^2(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}))_2| \le CMJ_2(t)J_3(t).$$

Com isso, pela Desigualdade de Young (1.17) e (2.22), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}J_2^2(t) + \gamma J_3^2(t) \leq CMJ_2(t)J_3(t) \leq CM\gamma^{-1}J_2^2(t) + \frac{1}{2}\gamma J_3^2(t).$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}J_2^2(t) + \frac{1}{2}\gamma J_3^2(t) \leq CM\gamma^{-1}J_2^2(t).$$

Pelo Lema de Gronwall, inferimos

$$J_2^2(t) \leq \exp\{CM\gamma^{-1}t\}J_2^2(0) \leq \exp\{CM\gamma^{-1}T\}\|(\mathbf{u}_0, \mathbf{b}_0)\|_{H^2}^2,$$

para todo $0 \leq t < T$. Portanto, $J_2(t)$ está limitada em $[0, T)$ por uma constante positiva

$$K_2 := \exp\{CM\gamma^{-1}T\}\|(\mathbf{u}_0, \mathbf{b}_0)\|_{H^2}$$

que depende somente de M, T, μ, ν e $\|(\mathbf{u}_0, \mathbf{b}_0)\|_{H^2}$.

Agora, consideremos $n \geq 3$ e $J_n(t)$ limitada para $0 \leq t < T$. Verifiquemos que $J_{n+1}(t)$ é limitada neste mesmo intervalo. Vimos em (2.22) que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}J_{n+1}^2(t) + \gamma J_{n+2}^2(t) \leq S_{n+1}(t). \tag{2.23}$$

Em ordem a estimar $S_{n+1}(t)$ é suficiente limitarmos o termo $(D^{n+1}\mathbf{u}, D^{n+1}(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2$, pois as demais parcelas em $S_{n+1}(t)$ seguem de modo análogo. Por integração por partes e pela Regra de Leibniz para derivadas, temos

$$\begin{aligned}(D^{n+1}\mathbf{u}, D^{n+1}(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2 &= -(D^{n+2}\mathbf{u}, D^n(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2 \\ &= -\sum_{i=1}^{3}(D^{n+2}\mathbf{u}, D^n(b_iD_i\mathbf{b}))_2 \\ &= -\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=1}^{3}\binom{n}{j}(D^{n+2}\mathbf{u}, D^jb_iD^{n-j}D_i\mathbf{b})_2.\end{aligned}$$

Assim, é suficiente analisarmos o termo da forma $(D^{n+2}\mathbf{u}, D^j\mathbf{b}D^{n+1-j}\mathbf{b})_2$, onde $0 \leq j \leq n$. Examinemos três casos:

1º Caso: Considere que $0 \leq j \leq n-2$.

Pela Desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned}
|(D^{n+2}\mathbf{u}, D^j\mathbf{b}D^{n+1-j}\mathbf{b})_2| &\leq \|D^j\mathbf{b}\|_\infty \|D^{n+2}\mathbf{u}\|_2 \|D^{n+1-j}\mathbf{b}\|_2 \\
&\leq \|D^j\mathbf{b}\|_\infty J_{n+2}(t) J_{n+1-j}(t) \\
&\leq C_j(J_n(t) + J_0(t)) J_{n+2}(t) C_n(J_{n+1}(t) + J_0(t)) \\
&\leq K_n(J_{n+1}(t) + J_0(t)) J_{n+2}(t),
\end{aligned}$$

onde na terceira passagem utilizamos os Lemas 4.3 e 1.22 e na última aplicamos a hipótese de indução e o fato de que $J_0(t)$ é limitado (ver Lema 2.1).

2º Caso: Assuma que $j = n - 1$.

Aplicando a Desigualdade de Hölder, o Lema 4.3 e o fato que $J_2(t)$ é limitado, encontramos

$$\begin{aligned}
|(D^{n+2}\mathbf{u}, D^j\mathbf{b}D^{n+1-j}\mathbf{b})_2| &= |(D^{n+2}\mathbf{u}, D^{n-1}\mathbf{b}D^2\mathbf{b})_2| \\
&\leq \|D^{n-1}\mathbf{b}\|_\infty \|D^{n+2}\mathbf{u}\|_2 \|D^2\mathbf{b}\|_2 \\
&\leq C_n(J_{n+1}(t) + J_0(t)) J_{n+2}(t) J_2(t) \\
&\leq C_n(J_{n+1}(t) + J_0(t)) J_{n+2}(t).
\end{aligned}$$

3º Caso: Considere, por fim, que $j = n$.

Novamente pela Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
|(D^{n+2}\mathbf{u}, D^j\mathbf{b}D^{n+1-j}\mathbf{b})_2| &= |(D^{n+2}\mathbf{u}, D^n\mathbf{b}D\mathbf{b})_2| \\
&\leq \|D\mathbf{b}\|_\infty \|D^{n+2}\mathbf{u}\|_2 \|D^n\mathbf{b}\|_2 \\
&\leq C_n(J_3(t) + J_0(t)) J_{n+2}(t) J_n(t) \\
&\leq K_n(J_{n+1}(t) + J_0(t)) J_{n+2}(t),
\end{aligned}$$

onde na segunda desigualdade usamos o Lema 4.3, na desigualdade seguinte aplicamos o Lema 1.22 e a hipótese de indução.

Observando os três casos estudados acima, concluímos que

$$|(D^{n+1}\mathbf{u}, D^{n+1}(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2| \leq K_n(J_{n+1}(t) + J_0(t)) J_{n+2}(t), \quad \forall\ 0 \leq t < T, \tag{2.24}$$

onde K_n é uma constante positiva que depende de $n, M, T, \mu, \nu, \|(\mathbf{u}_0, \mathbf{b}_0)\|_{H^n}$.

Analogamente, prova-se que

$$(D^{n+1}\mathbf{u}, D^{n+1}(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}))_2, (D^{n+1}\mathbf{b}, D^{n+1}(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2, (D^{n+1}\mathbf{b}, D^{n+1}(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}))_2$$

podem ser estimados, no mesmo intervalo de tempo, pelo mesmo limite dado em (2.24).

Deste modo, usando a Desigualdade de Young (1.17), (2.23) torna-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}J_{n+1}^2(t)+\gamma J_{n+2}^2(t) &\leq K_n(J_{n+1}(t)+J_0(t))J_{n+2}(t)\\ &\leq K_n\gamma^{-1}(J_{n+1}(t)+J_0(t))^2+\frac{1}{2}\gamma J_{n+2}^2(t).\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}J_{n+1}^2(t)+\gamma J_{n+2}^2(t)\leq K_n\gamma^{-1}(J_{n+1}^2(t)+J_0^2(t)).$$

Daí, pelo Lema 2.1, obtemos

$$\frac{d}{dt}J_{n+1}^2(t)+\gamma J_{n+2}^2(t)\leq K_n\gamma^{-1}(J_{n+1}^2(t)+\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2^2).$$

Por fim, pelo Lema de Gronwall, chegamos a

$$\begin{aligned}J_{n+1}^2(t) &\leq \exp\{K_n\gamma^{-1}t\}\left[J_{n+1}^2(0)+K_n\gamma^{-1}\int_0^t\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2^2d\tau\right]\\ &\leq \exp\{K_n\gamma^{-1}t\}\left[\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_{H^{n+1}}^2+K_n\gamma^{-1}\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2^2t\right]\\ &\leq K_{n+1},\end{aligned}$$

para todo $0\leq t<T$ e

$$K_{n+1}:=\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_{H^{n+1}}^2\exp\{K_n\gamma^{-1}T\}\left[1+K_n\gamma^{-1}T\right].$$

Portanto, $J_{n+1}(t)$ está limitada por uma constante positiva que depende somente de n, M, T, μ, ν e $\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_{H^{n+1}}$. Deste modo, por indução, o resultado é válido. □

2.2 A Aplicação Ilimitada $\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})\|_q$, $\frac{3}{2}<q\leq 2$

Nesta seção, vamos assumir que a solução $(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)$ do sistema (4) em $[0,T^*)$, com $T^*<\infty$, apresenta explosão em ordem a provar que

$$\sup_{0\leq t<T^*}\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q=\infty,\quad \frac{3}{2}<q\leq 2. \tag{2.25}$$

É importante destacar que se $\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_\infty$ é limitada em $0 \leq t < T$ para algum T finito, então $(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)$ pode ser continuada a uma solução suave além de T. Isto desempenha um papel importante na demonstração de (2.25). Mais especificamente, garantiremos que $\sup_{0\leq t<T} \|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_\infty$ é limitado por uma constante se (2.25) não for verdadeira e, por conseguinte, este resultado nos levará a uma contradição.

Começamos as justificativas desta discussão com o caso específico $q = 2$.

Teorema 2.2. *Seja $(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)$ solução forte do sistema (4) definida no intervalo maximal $[0,T^*)$. Assuma que*

$$\sup_{0\leq t<T} \|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2 < \infty, \tag{2.26}$$

então

$$\sup_{0\leq t<T} \|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_\infty \leq K_2,$$

onde K_2 é uma constante positiva que depende somente de $\sup\limits_{0\leq t<T} \|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2, T, \mu, \nu, \|(\widehat{\mathbf{u}}_0,\widehat{\mathbf{b}}_0)\|_1$. Em particular, se $T^* < \infty$, então

$$\sup_{0\leq t<T^*} \|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2 = \infty.$$

Demonstração. Aplicando a Transformada de Fourier à primeira equação do sistema (4), temos

$$\widehat{\mathbf{u}}_t(\mathbf{k},t) - \mu\widehat{\Delta\mathbf{u}}(\mathbf{k},t) + \widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}}(\mathbf{k},t) - \widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}}(\mathbf{k},t) + [\nabla(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)]^\wedge(\mathbf{k},t) = 0, \tag{2.27}$$

para todo $\mathbf{k} = (k_1,k_2,k_3) \in \mathbb{R}^3$ e $t \in [0,T)$. Consequentemente,

$$\widehat{\mathbf{u}}_t + \widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}} - \widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}} + [\nabla(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)]^\wedge = -\mu|\mathbf{k}|^2\widehat{\mathbf{u}},$$

desde que

$$\widehat{\Delta\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^3 \widehat{D_i^2\mathbf{u}} = -\sum_{i=1}^3 k_i^2\widehat{\mathbf{u}} = -|\mathbf{k}|^2\widehat{\mathbf{u}}. \tag{2.28}$$

Agora, considerando a definição

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x},t) := -\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x},t) + \mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}(\mathbf{x},t) - \nabla(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)(\mathbf{x},t), \quad \forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3, 0\leq t<T,$$

podemos reescrever (2.27) da seguinte forma:

$$\widehat{\mathbf{u}}_t = -\mu|\mathbf{k}|^2\widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{Q}}. \tag{2.29}$$

Por outro lado,

$$\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}} - \widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}} = -\widehat{\mathbf{Q}} - [(\nabla(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)]^\wedge$$

é a decomposição ortogonal do vetor $\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}} - \widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}}$ em um vetor ortogonal a $\mathbf{k}$ e um vetor paralelo a $\mathbf{k}$, respectivamente. De fato, por (2.29), temos que

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{k} &= \widehat{\mathbf{u}}_t\cdot\mathbf{k} + \mu|\mathbf{k}|^2(\widehat{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{k}) \\
&= (\widehat{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{k})_t + \mu|\mathbf{k}|^2(\widehat{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{k}) \\
&= -i[(\widehat{\nabla\cdot\mathbf{u}})_t + \mu|\mathbf{k}|^2(\widehat{\nabla\cdot\mathbf{u}})] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$. Logo, $\widehat{\mathbf{Q}}$ é ortogonal a $\mathbf{k}$. Além disso,

$$\begin{aligned}
[\nabla(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)]^\wedge &= ([D_1(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)]^\wedge, [D_2(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)]^\wedge, [D_3(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)]^\wedge) \\
&= (ik_1(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)^\wedge, ik_2(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)^\wedge, ik_3(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)^\wedge) \\
&= [i(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)^\wedge]\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Assim sendo, $[\nabla(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)]^\wedge$ é paralelo a $\mathbf{k}$. Pelo Teorema de Pitágoras, segue que,

$$|\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}} - \widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}}|^2 = |\widehat{\mathbf{Q}}|^2 + |[\nabla(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)]^\wedge|^2.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
|\widehat{\mathbf{Q}}|^2 &= |\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}} - \widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}}|^2 - |[\nabla(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)]^\wedge|^2 \\
&\leq |\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}} - \widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}}|^2 \\
&\leq (|\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}}| + |\widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}}|)^2. \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

Aplicando o semigrupo do calor $e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}$ à igualdade (2.29) e integrando de 0 a t, obtemos

$$\int_0^t e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}\widehat{\mathbf{u}}_s\,ds = -\mu|\mathbf{k}|^2\int_0^t e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}\widehat{\mathbf{u}}\,ds + \int_0^t e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}\widehat{\mathbf{Q}}\,ds,$$

onde $0 \leq s \leq t < T$. Assim, integrando por partes, chegamos a

$$\widehat{\mathbf{u}}(\cdot, t) = e^{-\mu|\mathbf{k}|^2 t}\widehat{\mathbf{u}}_0 + \int_0^t e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}\widehat{\mathbf{Q}}\, ds.$$

Passando ao módulo, obtemos, através de (2.30), que

$$\begin{aligned} |\widehat{\mathbf{u}}| &\leq e^{-\mu|\mathbf{k}|^2 t}|\widehat{\mathbf{u}}_0| + \int_0^t e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}|\widehat{\mathbf{Q}}|\, ds \\ &\leq |\widehat{\mathbf{u}}_0| + \int_0^t e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}(|\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}}| + |\widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}}|)\, ds. \end{aligned}$$

Integrando em relação a $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ a desigualdade acima, inferimos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)|\, d\mathbf{k} &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{\mathbf{u}}_0(\mathbf{k})|\, d\mathbf{k} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}(|\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}}| + |\widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}}|)\, d\mathbf{k}ds \\ &= \|\widehat{\mathbf{u}}_0\|_1 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}(|\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}}| + |\widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}}|)\, d\mathbf{k}ds. \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\|\mathbf{u}\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\|\widehat{\mathbf{u}}\|_1.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_\infty &\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{\mathbf{u}}|\, d\mathbf{k} \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\|\widehat{\mathbf{u}}_0\|_1 + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}(|\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}}| + |\widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}}|)\, d\mathbf{k}ds. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Observemos que, pela Desigualdade de Hölder,

$$\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}|\widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}}|\, d\mathbf{k} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}\, d\mathbf{k}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}}|^2\, d\mathbf{k}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.32}$$

Sabemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2}\, dr = \pi^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto, por utilizar o Teorema de Mudança de Variáveis para integrais, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}\, d\mathbf{k} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\mu(k_1^2+k_2^2+k_3^2)(t-s)}\, dk_1dk_2dk_3 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\mu k_1^2(t-s)}\, dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\mu k_2^2(t-s)}\, dk_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\mu k_3^2(t-s)}\, dk_3 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\mu(t-s)}}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u_1^2}du_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u_2^2}du_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u_3^2}du_3 \\ &= \left(\frac{\pi}{2\mu}\right)^{\frac{3}{2}} (t-s)^{\frac{-3}{2}}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Além disso, usando a Identidade de Parseval, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}}|^2\, d\mathbf{k} &= \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}|^2\, d\mathbf{x} \;\leq\; C\int_{\mathbb{R}^3}\sum_{i=1}^{3}|b_iD_i\mathbf{b}|^2 d\mathbf{x} \\ &\leq C\|\mathbf{b}\|_\infty^2 \sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|D_i\mathbf{b}|^2\, d\mathbf{x} \;=\; C\|\mathbf{b}\|_\infty^2\|D\mathbf{b}\|_2^2 \\ &\leq C\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty^2\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_2^2 \;\leq\; K_1^2\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty^2, \end{aligned}$$

onde

$$K_1 := \sup_{0\leq t<T} \|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2, \tag{2.34}$$

ver (2.26). Aplicando essas estimativas em (2.32), concluímos que,

$$\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}|\widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}}|\, d\mathbf{k} \leq K_1C_\mu(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty. \tag{2.35}$$

Analogamente, conclui-se

$$\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}|\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}}|\, d\mathbf{k} \leq K_1C_\mu(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty, \tag{2.36}$$

ver (2.26). Assim, por (2.31), chegamos a

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|_\infty &\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\|\widehat{\mathbf{u}}_0\|_1 + K_1C_\mu\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty\, ds \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\|(\widehat{\mathbf{u}}_0,\widehat{\mathbf{b}}_0)\|_1 + K_1C_\mu\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty\, ds \end{aligned} \tag{2.37}$$

Agora apliquemos o mesmo processo a segunda equação do sistema (4). Passando a Transformada de Fourier nesta mesma equação, obtemos

$$\widehat{\mathbf{b}}_t(\mathbf{k},t) = \nu\widehat{\Delta\mathbf{b}}(\mathbf{k},t) - \widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}}(\mathbf{k},t) + \widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}}(\mathbf{k},t), \tag{2.38}$$

para todo $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$, $0 \leq t < T$. Similarmente a (2.28), encontramos

$$\widehat{\mathbf{b}}_t = -\nu|\mathbf{k}|^2\widehat{\mathbf{b}} - \widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}} + \widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}}. \tag{2.39}$$

Aplicando o semigrupo do calor $e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)}$ a (2.38) e, em seguida, integrando de 0 a t, obtemos

$$\int_0^t e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)}\widehat{\mathbf{b}}_s\,ds = -\nu|\mathbf{k}|^2\int_0^t e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)}\widehat{\mathbf{b}}\,ds + \int_0^t e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)}(-\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}} + \widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}})\,ds,$$

onde $0 \leq s \leq t < T$. Deste modo,

$$\widehat{\mathbf{b}}(\cdot,t) = e^{-\nu|\mathbf{k}|^2 t}\widehat{\mathbf{b}}_0 + \int_0^t e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)}(-\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}} + \widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}})\,ds.$$

Passando ao módulo, infere-se

$$\begin{aligned} |\widehat{\mathbf{b}}| &\leq e^{-\nu|\mathbf{k}|^2 t}|\widehat{\mathbf{b}}_0| + \int_0^t e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)}|-\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}} + \widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}}|\,ds \\ &\leq |\widehat{\mathbf{b}}_0| + \int_0^t e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)}(|\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}}| + |\widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}}|)\,ds. \end{aligned}$$

Integrando em relação a $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3}|\widehat{\mathbf{b}}|\,d\mathbf{k} &\leq \int_{\mathbb{R}^3}|\widehat{\mathbf{b}}_0|\,d\mathbf{k} + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)}(|\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}}| + |\widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}}|)\,d\mathbf{k}ds \\ &= \|\widehat{\mathbf{b}}_0\|_1 + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)}(|\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}}| + |\widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}}|)\,d\mathbf{k}ds. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade

$$\|\mathbf{b}\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\|\widehat{\mathbf{b}}\|_1,$$

concluímos que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{b}\|_\infty &\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3}|\widehat{\mathbf{b}}|\,d\mathbf{k} \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\|\widehat{\mathbf{b}}_0\|_1 + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)}(|\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}}| + |\widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}}|)\,d\mathbf{k}ds. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Pela Desigualdade de Hölder e argumentos análogos aos encontradados em (2.33) e (2.34), temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)}|\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}}|\,d\mathbf{k} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)}\,d\mathbf{k}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}}|^2\,d\mathbf{k}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq C_\nu(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}\|_\infty\|D\mathbf{b}\|_2\\ &\leq C_\nu(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_2\\ &\leq K_1C_\nu(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty,\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)}|\widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}}|\,d\mathbf{k} &\leq C_\nu(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{b}\|_\infty\|D\mathbf{u}\|_2\\ &\leq K_1C_\nu(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty.\end{aligned}$$

Aplicando estas estimativas em (2.40), temos que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{b}\|_\infty &\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\|\widehat{\mathbf{b}}_0\|_1 + K_1C_\nu\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty\,ds\\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\|(\widehat{\mathbf{u}}_0,\widehat{\mathbf{b}}_0)\|_1 + K_1C_\nu\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty\,ds. \end{aligned}\tag{2.41}$$

Deste modo, por (2.37) e (2.41), chegamos a

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\|(\widehat{\mathbf{u}}_0,\widehat{\mathbf{b}}_0)\|_1 + K_1C_{\mu,\nu}\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty\,ds.$$

Por fim, pelo Lema do tipo Gronwall 4.1, concluímos que

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\|(\widehat{\mathbf{u}}_0,\widehat{\mathbf{b}}_0)\|_1\exp\{K_1C_{\mu,\nu}T\},\quad \forall\ 0\leq t<T.$$

Portanto,

$$\sup_{0\leq t<T}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_\infty \leq K_2,\quad \forall\ 0\leq t<T,$$

onde K_2 depende somente de $K_1, T, \mu, \nu, \|(\widehat{\mathbf{u}}_0,\widehat{\mathbf{b}}_0)\|_1$.

Em particular, se $T^* < \infty$ e $K_1 < \infty$ (ver (2.26)) então, pela desigualdade acima a solução de (4) pode ser continuada além de T^*. Isto contradiz a maximalidade de T^*.

□

É importante ressaltar que, a prova do Corolário 2.3 abaixo segue facilmente de uma leve reformulação da demonstração do Teorema 2.2. Contudo, para a comodidade do leitor, expomos tal modificação a seguir.

Corolário 2.3. *Seja* $\frac{3}{2} < q \leq 2$. *Seja* $(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)$ *solução forte do sistema* (4) *definida no intervalo maximal* $[0, T^*)$. *Assuma que*

$$\sup_{0 \leq t < T} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot, t)\|_q < \infty. \tag{2.42}$$

Então

$$\sup_{0 \leq t < T} \|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_\infty \leq K_{2,q},$$

onde $K_{2,q}$ *é uma constante positiva que depende somente de* $\|(\widehat{\mathbf{u}}_0, \widehat{\mathbf{b}}_0)\|_1$, $\sup_{0 \leq t < T} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot, t)\|_q$, q, T, μ, ν. *Em particular, se* $T^* < \infty$, *então*

$$\sup_{0 \leq t < T^*} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot, t)\|_q = \infty.$$

Demonstração. Por (2.31) e (2.40), temos que

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_\infty \quad &\leq \quad \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \|(\widehat{\mathbf{u}}_0, \widehat{\mathbf{b}}_0)\|_1 + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)} (|\widehat{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}}| + |\widehat{\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}}|) \, d\mathbf{k} ds \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)} (|\widehat{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{b}}| + |\widehat{\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u}}|) \, d\mathbf{k} ds. \end{aligned}$$

Vamos estimar as integrais do lado direito da desigualdade acima. Primeiramente, pela Desigualdade de Hölder e por (2.33), chegamos a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)} |\widehat{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{b}}| \, d\mathbf{k} \quad &\leq \quad \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{-q\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)} \, d\mathbf{k} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{b}}|^{q'} \, d\mathbf{k} \right)^{\frac{1}{q'}} \\ &= \quad C_{q,\nu} (t-s)^{-\frac{3}{2q}} \|\widehat{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{b}}\|_{q'}, \end{aligned}$$

onde $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Daí, pela Desigualdade de Hausdorff-Young (1.19),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)} |\widehat{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{b}}| \, d\mathbf{k} \quad &\leq \quad C_{q,\nu} (t-s)^{-\frac{3}{2q}} \|\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{b}\|_q \\ &= \quad C_{q,\nu} (t-s)^{-\frac{3}{2q}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{b}|^q \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C_{q,\nu}(t-s)^{-\frac{3}{2q}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left| \sum_{i=1}^{3} \mathbf{u}_i D_i \mathbf{b} \right|^q \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C_{q,\nu}(t-s)^{-\frac{3}{2q}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} |\mathbf{u}_i D_i \mathbf{b}|^q \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= C_{q,\nu}(t-s)^{-\frac{3}{2q}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} |\mathbf{u}_i|^q |D_i \mathbf{b}|^q \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C_{q,\nu}(t-s)^{-\frac{3}{2q}} \|\mathbf{u}\|_\infty \left(\sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |D_i \mathbf{b}|^q \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= C_{q,\nu}(t-s)^{-\frac{3}{2q}} \|\mathbf{u}\|_\infty \|D\mathbf{b}\|_q. \qquad (2.43)
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)} |\widehat{\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u}}| \, d\mathbf{k} &\leq C_{q,\nu}(t-s)^{-\frac{3}{2q}} \|\mathbf{b}\|_\infty \|D\mathbf{u}\|_q, \\
\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)} |\widehat{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}}| \, d\mathbf{k} &\leq C_{q,\mu}(t-s)^{-\frac{3}{2q}} \|\mathbf{u}\|_\infty \|D\mathbf{u}\|_q, \\
\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)} |\widehat{\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}}| \, d\mathbf{k} &\leq C_{q,\mu}(t-s)^{-\frac{3}{2q}} \|\mathbf{b}\|_\infty \|D\mathbf{b}\|_q.
\end{aligned}
$$

Deste modo,

$$
\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \|(\widehat{\mathbf{u}}_0, \widehat{\mathbf{b}}_0)\|_1 + C_{q,\mu,\nu} K_{1,q} \int_{\mathbb{R}^3} (t-s)^{-\frac{3}{2q}} \|(\mathbf{u}, \mathbf{b})\|_\infty ds,
$$

onde

$$
K_{1,q} := \sup_{0 \leq t < T} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot, t)\|_q, \qquad (2.44)
$$

ver (2.42). Pelo Lema 4.1,

$$
\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_\infty \leq K_{2,q}, \quad \forall\, 0 \leq t < T,
$$

onde $K_{2,q} := 2(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \|(\widehat{\mathbf{u}}_0, \widehat{\mathbf{b}}_0)\|_1 \exp\{2C_{q,\mu,\nu} K_{1,q} T\}$. Por fim,

$$
\sup_{0 \leq t < T} \|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_\infty \leq K_{2,q}.
$$

Em particular, se $T^* < \infty$ e $K_{1,q} < \infty$ (ver (2.42)) então, pela desigualdade acima a solução de (4) pode ser continuada além de T^*. Isto contradiz a maximalidade de T^*. □

O Teorema 2.2 nos diz que é possível encontrar uma limitação para $\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_\infty$, no intervalo de tempo $[0,T)$, sempre que $\sup_{0\le t<T}\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2$ for finito. Modificando a prova deste mesmo teorema, é possível garantir que $t^{\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_\infty$ também é limitado em $(0,T)$ se considerarmos a mesma hipótese sobre a derivada da solução $(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)$ do sistema (4).

Proposição 2.1. *Seja* $(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)$ *solução forte do sistema* (4) *definida no intervalo maximal* $[0,T^*)$. *Assuma que*

$$\sup_{0\le t<T}\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2<\infty. \tag{2.45}$$

Então a seguinte estimativa se faz verdadeira:

$$\sup_{0<t<T} t^{\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_\infty\le K_2,$$

para alguma constante positiva K_2 *que depende somente dos valores de* $\sup\limits_{0\le t<T}\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2,T,\mu,\nu$ *e* $\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2$.

Demonstração. Aplique $s^{\frac{3}{4}}e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}$ $(0<s\le t<T)$ em (2.29) e, em seguida, integre o resultado sobre $[0,t]$ em ordem a obter

$$\int_0^t s^{\frac{3}{4}}e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}\widehat{\mathbf{u}}_s\,ds=\int_0^t s^{\frac{3}{4}}e^{-\mu|k|^2(t-s)}[-\mu|\mathbf{k}|^2\widehat{\mathbf{u}}+\widehat{\mathbf{Q}}]\,ds.$$

Com isso, integrando por partes, chegamos a

$$t^{\frac{3}{4}}\widehat{\mathbf{u}}(\cdot,t)=\frac{3}{4}\int_0^t s^{-\frac{1}{4}}e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}\widehat{\mathbf{u}}\,ds+\int_0^t s^{\frac{3}{4}}e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}\widehat{\mathbf{Q}}\,ds.$$

Daí, podemos inferir, a partir de (2.30), que

$$\begin{aligned}|t^{\frac{3}{4}}\widehat{\mathbf{u}}| &\le \frac{3}{4}\int_0^t s^{-\frac{1}{4}}e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}|\widehat{\mathbf{u}}|\,ds+\int_0^t s^{\frac{3}{4}}e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}|\widehat{\mathbf{Q}}|\,ds\\ &\le \frac{3}{4}\int_0^t s^{-\frac{1}{4}}e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}|\widehat{\mathbf{u}}|\,ds+\int_0^t s^{\frac{3}{4}}e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}(|\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}}|+|\widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}}|)\,ds.\end{aligned}$$

Integrando sobre $\mathbb{R}^3$, obtemos

$$\begin{aligned}t^{\frac{3}{4}}\int_{\mathbb{R}^3}|\widehat{\mathbf{u}}|\,d\mathbf{k} &\le \frac{3}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^t s^{-\frac{1}{4}}e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}|\widehat{\mathbf{u}}|\,dsd\mathbf{k}\\ &\quad+\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^t s^{\frac{3}{4}}e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}(|\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}}|+|\widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}}|)\,dsd\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Sabemos que,

$$\|\mathbf{u}\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\|\widehat{\mathbf{u}}\|_1.$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned} t^{\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}\|_\infty &\leq \frac{3}{4(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_0^t s^{-\frac{1}{4}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}|\widehat{\mathbf{u}}|\,d\mathbf{k}ds \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_0^t s^{\frac{3}{4}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}(|\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}}| + |\widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}}|)\,d\mathbf{k}ds. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Utilizando a Desigualdade de Hölder para estimar as integrais sobre $\mathbb{R}^3$ acima, temos

$$\begin{aligned} t^{\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}\|_\infty &\leq \frac{3}{4(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_0^t s^{-\frac{1}{4}}\left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}\,d\mathbf{k}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\widehat{\mathbf{u}}|^2\,d\mathbf{k}\right)^{\frac{1}{2}} ds \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_0^t s^{\frac{3}{4}}\left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}|\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}}|\,d\mathbf{k}\right) ds \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_0^t s^{\frac{3}{4}}\left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}|\widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}}|\,d\mathbf{k}\right) ds. \end{aligned}$$

Analogamente ao que foi feito em (2.33), (2.35) e (2.36), e também por utilizar a Identidade de Parseval, concluímos que

$$t^{\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}\|_\infty \leq C_\mu\int_0^t s^{-\frac{1}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}\|_2 ds + K_1C_\mu\int_0^t s^{\frac{3}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty\,ds,$$

onde K_1 é dado em (2.34) (ver (2.45)). Usando o Lema 2.1, encontramos

$$t^{\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}\|_\infty \leq C_\mu\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2\int_0^t s^{-\frac{1}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\,ds + K_1C_\mu\int_0^t s^{\frac{3}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty\,ds. \tag{2.47}$$

Observemos que,

$$\int_0^t s^{-\frac{1}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\,ds = \int_0^{\frac{t}{2}} s^{-\frac{1}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\,ds + \int_{\frac{t}{2}}^t s^{-\frac{1}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\,ds.$$

Vamos estimar cada uma das parcelas do lado direito da igualdade acima. Sendo assim, para a primeira parcela temos o seguinte:

$$\int_0^{\frac{t}{2}} s^{-\frac{1}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}ds \quad\leq\quad \left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{3}{4}}\int_0^{\frac{t}{2}} s^{-\frac{1}{4}}\,ds = \frac{4}{3}\left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{3}{4}}\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Para segunda parcela, temos

$$\int_{\frac{t}{2}}^{t} s^{-\frac{1}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}ds \leq \left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} \int_{\frac{t}{2}}^{t}(t-s)^{-\frac{3}{4}}ds = 4\left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = 4.$$

Deste modo,

$$\int_0^t s^{-\frac{1}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}ds \leq \frac{16}{3}. \tag{2.48}$$

Com isso, substituindo esta estimativa em (2.47), chegamos a

$$t^{\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}\|_\infty \leq C_\mu\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2 + K_1C_\mu\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}}s^{\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty\, ds. \tag{2.49}$$

Apliquemos o mesmo processo à segunda equação do sistema (4). Por usar (2.39), obtemos

$$\int_0^t s^{\frac{3}{4}}e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)}\widehat{\mathbf{b}}_s\, ds = -\nu|\mathbf{k}|^2\int_0^t s^{\frac{3}{4}}e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)}\widehat{\mathbf{b}}\, ds + \int_0^t s^{\frac{3}{4}}e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)}(-\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}} + \widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}})\, ds.$$

Assim,

$$t^{\frac{3}{4}}\widehat{\mathbf{b}}(\cdot,t) = \frac{3}{4}\int_0^t s^{-\frac{1}{4}}e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)}\widehat{\mathbf{b}}\, ds + \int_0^t s^{\frac{3}{4}}e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)}(-\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}} + \widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}})\, ds.$$

Passando ao módulo, encontramos

$$|t^{\frac{3}{4}}\widehat{\mathbf{b}}(\cdot,t)| \leq \frac{3}{4}\int_0^t s^{-\frac{1}{4}}e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)}|\widehat{\mathbf{b}}|\, ds + \int_0^t s^{\frac{3}{4}}e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)}|-\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}} + \widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}}|\, ds.$$

Integrando sobre $\mathbb{R}^3$, inferimos

$$\begin{aligned} t^{\frac{3}{4}}\int_{\mathbb{R}^3}|\widehat{\mathbf{b}}|\, d\mathbf{k} \quad &\leq \quad \frac{3}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^t s^{-\frac{1}{4}}e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)}|\widehat{\mathbf{b}}|\, dsd\mathbf{k} \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3}\int_0^t s^{\frac{3}{4}}e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)}(|\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}}| + |\widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}}|)\, dsd\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} t^{\frac{3}{4}}\|\mathbf{b}\|_\infty \quad &\leq \quad \frac{t^{\frac{3}{4}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\|\widehat{\mathbf{b}}\|_1 \\ &\leq \quad \frac{3}{4(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_0^t s^{-\frac{1}{4}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)}|\widehat{\mathbf{b}}|\, d\mathbf{k}ds \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_0^t s^{\frac{3}{4}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)}(|\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}}| + |\widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}}|)\, d\mathbf{k}ds. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Analogamente a (2.49), obtemos

$$t^{\frac{3}{4}}\|\mathbf{b}\|_\infty \leq C_\nu\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2 + K_1C_\nu\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}}s^{\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty\,ds, \tag{2.51}$$

onde K_1 é dado em (2.34). Por (2.49) e (2.51), chegamos a

$$t^{\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty \leq C_{\mu,\nu}\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2 + K_1C_{\mu,\nu}\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}}s^{\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty\,ds.$$

Pelo Lema 4.1, encontramos

$$t^{\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_\infty \leq K_2, \quad \forall\, 0<t<T,$$

onde $K_2 = C_{\mu,\nu}\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2\exp\{K_1C_{\mu,\nu}T\}$. Portanto,

$$\sup_{0<t<T} t^{\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_\infty \leq K_2.$$

$\square$

Modificando a prova da Proposição 2.1 é possível garantir que $t^{\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_\infty$ é limitado em $(0,T)$ se considerarmos $\sup_{0\leq t<T}\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q$, com $\frac{3}{2}<q\leq 2$, finito.

Proposição 2.2. *Seja* $\frac{3}{2}<q\leq 2$. *Seja* $(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)$ *solução forte do sistema* (4) *definida no intervalo maximal* $[0,T^*)$. *Assuma que*

$$\sup_{0\leq t<T}\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q < \infty, \tag{2.52}$$

então

$$\sup_{0<t<T} t^{\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_\infty \leq K_{2,q},$$

para algum limite positivo $K_{2,q}$ *que depende somente dos valores de* $\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2$, $\sup_{0\leq t<T}\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q$, q,μ,ν,T.

Demonstração. Em (2.46) vimos que

$$\begin{aligned} t^{\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_\infty &\leq \frac{3}{4(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_0^t s^{-\frac{1}{4}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}|\widehat{\mathbf{u}}|\,d\mathbf{k}ds \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_0^t s^{\frac{3}{4}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}(|\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}}| + |\widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}}|)\,d\mathbf{k}ds. \end{aligned}$$

Portanto, pela Desigualdade de Hölder, inferimos

$$\begin{aligned} t^{\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}\|_\infty \;\leq\; & \frac{3}{4(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_0^t s^{-\frac{1}{4}}\left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}\,d\mathbf{k}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\widehat{\mathbf{u}}|^2\,d\mathbf{k}\right)^{\frac{1}{2}} ds \\ & + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_0^t s^{\frac{3}{4}}\left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{-q\mu|\mathbf{k}|^2(t-s)}\,d\mathbf{k}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}(|\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}}| + |\widehat{\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}}|)^{q'}\,d\mathbf{k}\right)^{\frac{1}{q'}} ds, \end{aligned}$$

onde $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$. Por (2.33) e (2.43), obtemos

$$t^{\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}\|_\infty \leq C_\mu \int_0^t s^{-\frac{1}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\widehat{\mathbf{u}}\|_2\,ds + K_{1,q}C_{q,\mu}\int_0^t s^{\frac{3}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{2q}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty\,ds,$$

onde $K_{1,q}$ é dado em (2.44) (ver (2.52)). Usando Identidade de Parseval e o Lema 2.1, concluímos que

$$t^{\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_\infty \leq C_\mu\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2\int_0^t s^{-\frac{1}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}ds + K_{1,q}C_{q,\mu}\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2q}}s^{\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty\,ds.$$

Por (2.48), chegamos a

$$t^{\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}\|_\infty \leq C_\mu\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2 + K_{1,q}C_{q,\mu}\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2q}}s^{\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty\,ds.$$

Aplicando um processo análogo à segunda equação do sistema (4), obtemos

$$t^{\frac{3}{4}}\|\mathbf{b}(\cdot,t)\|_\infty \leq C_\nu\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2 + K_{1,q}C_{q,\nu}\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2q}}s^{\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,s)\|_\infty\,ds,$$

ver (2.50). Assim,

$$t^{\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_\infty \leq C_{\mu,\nu}\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2 + K_{1,q}C_{q,\mu,\nu}\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2q}}s^{\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,s)\|_\infty\,ds.$$

Pelo Lema 4.1, chegamos a

$$t^{\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_\infty \leq K_{2,q}, \quad \forall\, 0<t<T,$$

onde $K_{2,q} := C_{\mu,\nu}\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2\exp\{K_{1,q}C_{q,\mu,\nu}T\}$. Portanto,

$$\sup_{0<t<T} t^{\frac{3}{4}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_\infty \leq K_{2,q}.$$

□

2.3 Desigualdade de Leray para o Sistema MHD

Nesta seção, considerando que $(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)$ é a solução do sistema (4) no intervalo $[0, T^*)$, provaremos o limite inferior (conhecido no caso das equações (5) como Desigualdade de Leray (ver [28])).

$$\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot, t)\|_2 \geq \frac{C_{\mu,\nu}}{(T^* - t)^{\frac{1}{4}}}, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*,$$

se $T^* < \infty$, o qual nos garante que

$$\lim_{t \nearrow T^*} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot, t)\|_2 = \infty.$$

Com esta meta em mente, apresentaremos um resultado que estabelece uma desigualdade diferencial envolvendo $\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})\|_2$. Mais precisamente, temos o seguinte lema:

Lema 2.2. *Seja* $(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)$ *solução forte do sistema* (4) *definida no intervalo maximal* $[0, T^*)$. *Então,*

$$\frac{d}{dt}\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot, t)\|_2^2 \leq C\gamma^{-3}\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot, t)\|_2^6, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*,$$

onde C *é uma constante positiva e* $\gamma := \min\{\mu, \nu\}$.

Demonstração. Vamos direto a prova. Primeiramente, notemos que a primeira equação de (4) nos permite informar que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_2^2 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(D\mathbf{u}, D\mathbf{u})_2 \\
&= \sum_{j=1}^{3}(D_j\mathbf{u}, D_j\mathbf{u}_t)_2 \\
&= \sum_{j=1}^{3}[\mu(D_j\mathbf{u}, D_j(\Delta\mathbf{u}))_2 - (D_j\mathbf{u}, D_j(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}))_2 + (D_j\mathbf{u}, D_j(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2 \\
&\quad - (D_j\mathbf{u}, D_j\nabla(p + \frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2))_2].
\end{aligned}$$

Vamos estudar separadamente algumas das parcelas do lado direito das igualdades acima. Assim sendo, por integração por partes, obtemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{3}(D_j\mathbf{u}, D_j(\Delta\mathbf{u}))_2 &= \sum_{i,j=1}^{3}(D_j\mathbf{u}, D_i^2 D_j\mathbf{u})_2 \\
&= -\sum_{i,j=1}^{3}(D_iD_j\mathbf{u}, D_iD_j\mathbf{u})_2 \\
&= -\|D^2\mathbf{u}\|_2^2
\end{aligned} \tag{2.53}
$$

e também

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{3}(D_j\mathbf{u}, D_j(\nabla(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)))_2 &= \sum_{i,j=1}^{3}(D_ju_i, D_jD_i(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2))_2 \\
&= -\sum_{i,j=1}^{3}(D_iD_ju_i, D_j(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2))_2 \\
&= -\sum_{j=1}^{3}(D_j(\nabla\cdot\mathbf{u}), D_j(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2))_2 \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

pois $\nabla\cdot\mathbf{u}=0$. Deste modo,

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|D\mathbf{u}\|_2^2+\mu\|D^2\mathbf{u}\|_2^2 = -\sum_{j=1}^{3}(D_j\mathbf{u}, D_j(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}))_2+\sum_{j=1}^{3}(D_j\mathbf{u}, D_j(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2. \tag{2.54}
$$

Por outro lado, avaliando a segunda equação de (4), concluímos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|D\mathbf{b}(\cdot,t)\|_2^2 &= \sum_{j=1}^{3}(D_j\mathbf{b}, D_j\mathbf{b}_t)_2 \\
&= \sum_{j=1}^{3}[\nu(D_j\mathbf{b}, D_j\Delta\mathbf{b})_2-(D_j\mathbf{b}, D_j(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2+(D_j\mathbf{b}, D_j(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}))_2] \\
&= -\nu\|D^2\mathbf{b}\|_2^2-\sum_{j=1}^{3}(D_j\mathbf{b}, D_j(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2+\sum_{j=1}^{3}(D_j\mathbf{b}, D_j(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}))_2,
\end{aligned}
$$

onde nesta última igualdade usamos (2.53). Logo,

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|D\mathbf{b}\|_2^2+\nu\|D^2\mathbf{b}\|_2^2 = -\sum_{j=1}^{3}(D_j\mathbf{b}, D_j(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}))+\sum_{j=1}^{3}(D_j\mathbf{b}, D_j(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u})). \tag{2.55}
$$

Somando as igualdades (2.54) e (2.55), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})\|_2^2 + \mu\|D^2\mathbf{u}\|_2^2 + \nu\|D^2\mathbf{b}\|_2^2 \quad = \quad & \sum_{j=1}^{3}[-(D_j\mathbf{u}, D_j(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}))_2 + (D_j\mathbf{u}, D_j(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2 \\ & -(D_j\mathbf{b}, D_j(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2 + (D_j\mathbf{b}, D_j(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}))_2].\end{aligned} \tag{2.56}$$

Agora, permita-nos examinar os termos do lado direito da igualdade acima.

$$\begin{aligned}(D_j\mathbf{u}, D_j(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2 &= \sum_{i,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} D_ju_kD_j(b_iD_ib_k)\,d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} D_ju_kD_jb_iD_ib_k\,d\mathbf{x} + \sum_{i,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}(D_ju_k)b_iD_jD_ib_k\,d\mathbf{x} \\ &\leq \sum_{i,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} |D_ju_k||D_jb_i||D_ib_k|\,d\mathbf{x} + \sum_{i,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}(D_ju_k)b_iD_jD_ib_k\,d\mathbf{x} \\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^3}|D\mathbf{u}||D\mathbf{b}|^2\,d\mathbf{x} + \sum_{i,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}(D_ju_k)b_iD_jD_ib_k\,d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Além disso, por integração por partes, podemos afirmar que

$$\begin{aligned}(D_j\mathbf{b}, D_j(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}))_2 &= \sum_{i,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} D_jb_kD_j(b_iD_iu_k)\,d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} D_jb_kD_jb_iD_iu_k\,d\mathbf{x} + \sum_{i,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}(D_jb_k)b_iD_jD_iu_k\,d\mathbf{x} \\ &\leq \sum_{i,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} |D_jb_k||D_jb_i||D_iu_k|\,d\mathbf{x} - \sum_{i,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}D_i((D_jb_k)b_i)D_ju_k\,d\mathbf{x} \\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^3}|D\mathbf{b}|^2|D\mathbf{u}|\,d\mathbf{x} - \sum_{i,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}((D_iD_jb_k)b_i + D_jb_kD_ib_i)D_ju_k\,d\mathbf{x} \\ &= C\int_{\mathbb{R}^3}|D\mathbf{b}|^2|D\mathbf{u}|\,d\mathbf{x} - \sum_{i,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}(D_iD_jb_k)b_iD_ju_k\,d\mathbf{x},\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos o fato que $\mathbf{b}$ é livre de divergente. Portanto, obtemos

$$(D_j\mathbf{u}, D_j(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2 + (D_j\mathbf{b}, D_j(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}))_2 \leq C\int_{\mathbb{R}^3}|D\mathbf{u}||D\mathbf{b}|^2\,d\mathbf{x}. \tag{2.57}$$

Notemos ainda que,

$$
\begin{aligned}
-(D_j\mathbf{b}, D_j(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2 &= -\sum_{i,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} D_jb_kD_j(u_iD_ib_k)\,d\mathbf{x}\\
&= -\sum_{i,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} D_jb_kD_ju_iD_ib_k\,d\mathbf{x} - \sum_{i,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}(D_jb_k)u_iD_jD_ib_k\,d\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

Mas, novamente por integração por partes, chegamos a

$$
\begin{aligned}
-\sum_{i,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}(D_jb_k)u_iD_jD_ib_k\,d\mathbf{x} &= \sum_{i,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} D_i((D_jb_k)u_i)D_jb_k\,d\mathbf{x}\\
&= \sum_{i,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}((D_iD_jb_k)u_i + D_jb_kD_iu_i)D_jb_k\,d\mathbf{x}\\
&= \sum_{i,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}(D_iD_jb_k)u_iD_jb_k\,d\mathbf{x},
\end{aligned}
$$

pois, $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$. Dessa forma,

$$
-\sum_{i,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}(D_jb_k)u_iD_jD_ib_k\,d\mathbf{x} = 0.
$$

Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
-(D_j\mathbf{b}, D_j(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}))_2 &= -\sum_{i,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} D_jb_kD_ju_iD_ib_k\,d\mathbf{x}\\
&\leq \sum_{i,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|D_jb_k||D_ju_i||D_ib_k|\,d\mathbf{x}\\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^3}|D\mathbf{u}||D\mathbf{b}|^2\,d\mathbf{x}. \qquad (2.58)
\end{aligned}
$$

Analogamente, pode-se provar que

$$
(D_j\mathbf{u}, D_j(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}))_2 \leq C\int_{\mathbb{R}^3}|D\mathbf{u}|^3\,d\mathbf{x}. \qquad (2.59)
$$

Substituindo (2.57), (2.58) e (2.59) em (2.56), concluímos que

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})\|_2^2 + \mu\|D^2\mathbf{u}\|_2^2 + \nu\|D^2\mathbf{b}\|_2^2 \leq C\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})\|_3^3.
$$

Utilizando a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (1.21),

$$\|v\|_3 \leq C\|v\|_2^{\frac{1}{2}}\|Dv\|_2^{\frac{1}{2}}, \quad \forall\, v \in H^1(\mathbb{R}^3),$$

temos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})\|_2^2 + \mu\|D^2\mathbf{u}\|_2^2 + \nu\|D^2\mathbf{b}\|_2^2 \leq C\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})\|_2^{\frac{3}{2}}\|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{b})\|_2^{\frac{3}{2}}.$$

Assuma que $\gamma := \min\{\mu, \nu\}$. Com isso, concluímos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})\|_2^2 + \gamma\|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{b})\|_2^2 \leq C\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})\|_2^{\frac{3}{2}}\|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{b})\|_2^{\frac{3}{2}}.$$

Agora, usando a Desigualdade de Young, encontramos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})\|_2^2 + \gamma\|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{b})\|_2^2 \leq C\gamma^{-3}\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})\|_2^6 + \frac{\gamma}{2}\|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{b})\|_2^2.$$

Por conseguinte,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})\|_2^2 + \frac{\gamma}{2}\|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{b})\|_2^2 \leq C\gamma^{-3}\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot, t)\|_2^6.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot, t)\|_2^2 \leq C\gamma^{-3}\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot, t)\|_2^6, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*.$$

Como queríamos demonstrar. □

O próximo teorema nos mostra como limitar inferiormente a norma L^2 do gradiente da solução do sistema (4), em seu intervalo de tempo maximal, assumindo que esta apresenta explosão em tempo finito. É importante ressaltar que o Teorema 2.4 abaixo remete a Leray no caso em que $\mathbf{b} = 0$ (ver [28]).

Teorema 2.4 (Desigualdade de Leray)**.** *Seja* $(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)$ *solução forte do sistema* (4) *definida no intervalo maximal* $[0, T^*)$. *Assuma que* $T^* < \infty$*, então*

$$\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot, t)\|_2 \geq C\gamma^{\frac{3}{4}}(T^* - t)^{-\frac{1}{4}}, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*,$$

onde C *é uma constante positiva e* $\gamma = \min\{\mu, \nu\}$.

Demonstração. Usando o fato que $T^* < \infty$, concluímos, através do Teorema 2.2, que

$$\sup_{0 \leq t < T^*} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot, t)\|_2 = \infty.$$

Assim, pelo Lema 2.2 e Lema 4.2, chegamos a

$$\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot, t)\|_2 \geq \left(\frac{1}{C\gamma^{-3}}\right)^{\frac{1}{4}} (T^* - t)^{\frac{-1}{4}}, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*.$$

Isto completa a prova do Teorema 2.4. □

2.4 A Aplicação Ilimitada $\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_q$, $3 < q \leq \infty$

Nesta seção, estamos interessados em provar que a solução $(\mathbf{u}, \mathbf{b})$ de (4) tem norma L^q, para $3 < q \leq \infty$, ilimitada em seu intervalo de existência, se esta apresenta explosão em tempo finito. Mais precisamente, permita-nos enunciar o seguinte resultado.

Teorema 2.5. *Seja $(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)$ solução forte do sistema (4) definida no intervalo maximal $[0, T^*)$. Seja $3 < q \leq \infty$. Assuma que*

$$\sup_{0 \leq t < T} \|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_q < \infty. \tag{2.60}$$

Então

$$\sup_{0 \leq t < T} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot, t)\|_2 \leq K_{2,q},$$

onde $K_{2,q}$ é uma constante positiva que depende somente de $\sup\limits_{0 \leq t < T} \|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_q, \|(D\mathbf{u}_0, D\mathbf{b}_0)\|_2, q, T,$ μ, ν. Em particular, se $T^* < \infty$, então

$$\sup_{0 \leq t < T^*} \|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_q = \infty.$$

Demonstração. Primeiramente considere que $\frac{6}{5} < r \leq 2$ é tal que $\frac{1}{q} + \frac{1}{2} = \frac{1}{r}$. Como

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b} + \nabla(p + \frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)) = -\nabla \cdot (\mathbf{u}_t - \mu \Delta \mathbf{u}) = 0,$$

já que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, temos que a projeção de Helmontz P_H está bem definida e

$$P_H(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b} + \nabla(p + \frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2),$$

ver (1.23). Daí, pela primeira equação do sistema (4), chegamos a

$$\mathbf{u}_t = \mu \Delta \mathbf{u} - P_H(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}).$$

Aplicando o semigrupo do calor $e^{\mu\Delta(t-s)}$ à primeira equação de (4) e integrando de 0 a t, obtemos

$$\int_0^t e^{\mu\Delta(t-s)}\mathbf{u}_s\,ds = \mu\int_0^t e^{\mu\Delta(t-s)}\Delta\mathbf{u}ds - \int_0^t e^{\mu\Delta(t-s)}P_H(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}-\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})\,ds.$$

Assim,

$$\mathbf{u}(\cdot,t) = e^{\mu\Delta t}\mathbf{u}_0 + \int_0^t e^{\mu\Delta(t-s)}P_H(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}-\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})\,ds. \tag{2.61}$$

Aplicando D_j à equação acima, encontramos

$$D_j\mathbf{u}(\cdot,t) = D_je^{\mu\Delta t}\mathbf{u}_0 + \int_0^t D_je^{\mu\Delta(t-s)}P_H(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}-\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})\,ds.$$

Dessa forma, pelos Lemas 4.7 e 4.12, podemos inferir

$$\begin{aligned}\|D_j\mathbf{u}(\cdot,t)\|_2 &\leq \|e^{\mu\Delta t}D_j\mathbf{u}_0\|_2 + \int_0^t \|D_j[e^{\mu\Delta(t-s)}P_H(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}-\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})]\|_2\,ds\\ &\leq C_\mu\|D_j\mathbf{u}_0\|_2 + C_{r,\mu}\int_0^t (t-s)^{-\lambda-\frac{1}{2}}\|P_H(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}-\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})]\|_r\,ds,\end{aligned}$$

onde $\lambda = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right)$. Logo, para $k = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$, concluímos, por (1.24), que

$$\|D_j\mathbf{u}(\cdot,t)\|_2 \leq C_\mu\|D_j\mathbf{u}_0\|_2 + C_{r,\mu}\int_0^t (t-s)^{-k}\|\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}-\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}\|_r\,ds.$$

Notemos que,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}-\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}\|_r^r &\leq C_r[\|\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\|_r^r + \|\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}\|_r^r]\\ &= C_r\left[\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}|^r\,d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}|^r\,d\mathbf{x}\right]\\ &= C_r\left[\int_{\mathbb{R}^3}\left|\sum_{i=1}^3 u_iD_i\mathbf{u}\right|^r\,d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^3}\left|\sum_{i=1}^3 b_iD_i\mathbf{b}\right|^r\,d\mathbf{x}\right]\\ &\leq C_r\left[\int_{\mathbb{R}^3}\left(\sum_{i=1}^3 |u_iD_i\mathbf{u}|\right)^r\,d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^3}\left(\sum_{i=1}^3 |b_iD_i\mathbf{b}|\right)^r\,d\mathbf{x}\right]\\ &\leq C_r\sum_{i=1}^3\int_{\mathbb{R}^3}|u_iD_i\mathbf{u}|^r\,d\mathbf{x} + C_r\sum_{i=1}^3\int_{\mathbb{R}^3}|b_iD_i\mathbf{b}|^r\,d\mathbf{x}\\ &= C_r\sum_{i=1}^3\int_{\mathbb{R}^3}|u_i|^r|D_i\mathbf{u}|^r\,d\mathbf{x} + C_r\sum_{i=1}^3\int_{\mathbb{R}^3}|b_i|^r|D_i\mathbf{b}|^r\,d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}-\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}\|_r^r &\le C_r\sum_{i=1}^{3}\|u_i\|_q^r\|D_i\mathbf{u}\|_2^r + C_r\sum_{i=1}^{3}\|b_i\|_q^r\|D_i\mathbf{b}\|_2^r\\
&\le C_r\|\mathbf{u}\|_q^r\|D\mathbf{u}\|_2^r + C_r\|\mathbf{b}\|_q^r\|D\mathbf{b}\|_2^r\\
&\le C_r\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_q^r\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_2^r.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\|\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}-\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}\|_r \le C_r K_{1,q}\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_2,$$

onde

$$K_{1,q} := \sup_{0\le t<T}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q. \tag{2.62}$$

(Ver (2.60)). Logo,

$$\begin{aligned}
\|D_j\mathbf{u}(\cdot,t)\|_2 &\le C_\mu\|D_j\mathbf{u}_0\|_2 + C_{r,\mu}K_{1,q}\int_0^t (t-s)^{-k}\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_2\,ds\\
&\le C_\mu\|(D_j\mathbf{u}_0,D_j\mathbf{b}_0)\|_2 + C_{r,\mu}K_{1,q}\int_0^t (t-s)^{-k}\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_2\,ds.
\end{aligned}$$

Passando a soma, quando $j=1,2,3$, obtemos

$$\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_2 \le C_\mu\|(D\mathbf{u}_0,D\mathbf{b}_0)\|_2 + C_{r,\mu}K_{1,q}\int_0^t (t-s)^{-k}\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_2\,ds. \tag{2.63}$$

Apliquemos o mesmo processo à segunda equação do sistema (4). Assim sendo, considerando o semigrupo do calor $e^{\nu\Delta(t-s)}$chegamos a

$$\int_0^t e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{b}_s\,ds = \int_0^t e^{\nu\Delta(t-s)}\nu\Delta\mathbf{b}\,ds + \int_0^t e^{\nu\Delta(t-s)}(-\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u})\,ds.$$

Dessa forma,

$$\mathbf{b}(\cdot,t) = e^{\nu\Delta t}\mathbf{b}_0 + \int_0^t e^{\nu\Delta(t-s)}(-\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u})(\cdot,s)\,ds. \tag{2.64}$$

Logo, aplicando D_j $(1\le j\le 3)$ à igualdade acima, encontramos

$$D_j\mathbf{b}(\cdot,t) = e^{\nu\Delta t}D_j\mathbf{b}_0 + \int_0^t D_j[e^{\nu\Delta(t-s)}(-\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u})]\,ds.$$

Usando os Lemas 4.7 e 4.12, obtemos

$$\begin{aligned}\|D_j\mathbf{b}(\cdot,t)\|_2 &\leq \|e^{\nu\Delta t}D_j\mathbf{b}_0\|_2 + \int_0^t \|D_j[e^{\nu\Delta(t-s)}(-\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u})]\|_2\,ds\\ &\leq C_\nu\|D_j\mathbf{b}_0\|_2 + C_{r,\nu}\int_0^t (t-s)^{-\lambda-\frac{1}{2}}\|\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}-\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}\|_r\,ds,\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|D_j\mathbf{b}(\cdot,t)\|_2 \leq C_\nu\|D_j\mathbf{b}_0\|_2 + C_{r,\nu}\int_0^t (t-s)^{-k}\|\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}-\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}\|_r\,ds.$$

Agora, observe que, pela Desigualdade de Hölder, encontramos

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}-\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}\|_r^r &\leq C_r\|\mathbf{u}\|_q^r\|D\mathbf{b}\|_2^r + C_r\|\mathbf{b}\|_q^r\|D\mathbf{u}\|_2^r\\ &\leq C_r\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_q^r\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_2^r.\end{aligned}$$

Por (2.62), chegamos a

$$\|\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}-\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}\|_r \leq C_rK_{1,q}\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_2.$$

Logo,

$$\|D_j\mathbf{b}(\cdot,t)\|_2 \leq C_\nu\|D_j\mathbf{b}_0\|_2 + C_{r,\nu}K_{1,q}\int_0^t (t-s)^{-k}\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_2\,ds.$$

Passando a soma, quando $j = 1, 2, 3$, temos que

$$\|D\mathbf{b}(\cdot,t)\|_2 \leq C_\nu\|(D\mathbf{u}_0,D\mathbf{b}_0)\|_2 + C_{r,\nu}K_{1,q}\int_0^t (t-s)^{-k}\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_2\,ds. \tag{2.65}$$

Por (2.63) e (2.65), obtemos

$$\begin{aligned}\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_2^2 &= \|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_2^2 + \|D\mathbf{b}(\cdot,t)\|_2^2\\ &\leq \left[C_{\mu,\nu}\|(D\mathbf{u}_0,D\mathbf{b}_0)\|_2 + C_{r,\mu,\nu}K_{1,q}\int_0^t (t-s)^{-k}\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_2\,ds\right]^2.\end{aligned}$$

Por fim,

$$\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2 \leq C_{\mu,\nu}\|(D\mathbf{u}_0,D\mathbf{b}_0)\|_2 + C_{r,\mu,\nu}K_{1,q}\int_0^t (t-s)^{-k}\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_2\,ds.$$

Pelo Lema 4.1, encontramos

$$\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2 \leq K_{2,q}, \quad \forall\, 0 \leq t < T,$$

onde $K_{2,q} := C_{\mu,\nu}\|(D\mathbf{u}_0, D\mathbf{b}_0)\|_2 \exp\{C_{r,\mu,\nu}K_{1,q}T\}$. Por conseguinte,

$$\sup_{0\leq t<T} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2 \leq K_{2,q}.$$

Em particular, se $T^* < \infty$ e $K_{1,q} < \infty$ (ver (2.62)) então a limitação acima gera uma contradição com o enunciado do Teorema 2.2. Isto completa a prova do Teorema 2.5. $\square$

2.5 Explosão de $\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q$ e $\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_r$, $q \in (3,\infty)$, $r \in (\frac{3}{2},\infty]$

Nesta seção, nossa meta é estudar $\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q$ e $\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_r$, quando $3 < q < \infty$ e $\frac{3}{2} < r \leq \infty$, em tempo de explosão finito. Além disso, também discutiremos o que ocorre com estas mesmas normas quando discutimos as equações de Navier-Stokes (5).

O lema abaixo estabelece uma desigualdade integral que será útil na busca por uma limitação para $\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q$.

Lema 2.3. *Seja $(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)$ solução forte do sistema (4) definida no intervalo maximal $[0,T^*)$. Sejam $3 < q < \infty$ e*

$$k = \frac{3}{2q} + \frac{1}{2} < 1.$$

Então,

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q \leq (\mu^{\frac{3}{2}} + \nu^{\frac{3}{2}})\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_q + C_{q,\mu,\nu}\int_{t_0}^{t} (t-s)^{-k}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,s)\|_q^2\, ds,$$

sempre que $0 \leq t_0 \leq t < T^*$, onde $C_{q,\mu,\nu}$ é constante positiva que só depende de μ,ν e q.

Demonstração. Considerando $r = \frac{q}{2}$ temos que $k = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right) + \frac{1}{2}$. Além disso, passando a norma L^q em (2.61) obtemos

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_q &\leq \|e^{\mu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_q + \int_{t_0}^{t} \|e^{\mu\Delta(t-s)}P_H(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} - \mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})\|_q\, ds \\
&\leq \mu^{\frac{3}{2}}\|\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_q + \int_{t_0}^{t} \|P_H e^{\mu\Delta(t-s)}(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} - \mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})\|_q\, ds \\
&\leq \mu^{\frac{3}{2}}\|\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_q + C_q\int_{t_0}^{t} \|e^{\mu\Delta(t-s)}(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} - \mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})\|_q\, ds,
\end{aligned}$$

onde na primeira desigualdade acima usamos o fato que P_H comuta com o semigrupo $e^{\mu\Delta(t-s)}$, na segunda utilizamos o Lema 4.7 e, por último, a desigualdade (1.24). Observemos que,

$$\begin{aligned}
\|e^{\mu\Delta(t-s)}(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}-\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})\|_q &= \|e^{\mu\Delta(t-s)}\sum_{i=1}^{3}(u_iD_i\mathbf{u}-b_iD_i\mathbf{b})\|_q\\
&\leq \sum_{i=1}^{3}\|e^{\mu\Delta(t-s)}D_i(u_i\mathbf{u}-b_i\mathbf{b})\|_q\\
&= \sum_{i=1}^{3}\|D_ie^{\mu\Delta(t-s)}(u_i\mathbf{u}-b_i\mathbf{b})\|_q\\
&\leq C_{q,\mu}(t-s)^{-\lambda-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{3}\|u_i\mathbf{u}-b_i\mathbf{b}\|_r,
\end{aligned}$$

onde $\lambda=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)$. Na primeira desigualdade acima usamos que $\nabla\cdot\mathbf{u}=\nabla\cdot\mathbf{b}=0$, na igualdade seguinte usamos o fato que a derivada comuta com o semigrupo $e^{\mu\Delta(t-s)}$ e na última das desigualdades utilizamos o Lema 4.12. Pela Desigualdade de Minkowski, chegamos a

$$\|e^{\mu\Delta(t-s)}(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}-\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})\|_q\leq C_{q,\mu}(t-s)^{-k}\sum_{i=1}^{3}(\|u_i\mathbf{u}\|_r+\|b_i\mathbf{b}\|_r).$$

Mas,

$$\|u_i\mathbf{u}\|_r\leq\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_q^2 \quad \text{e} \quad \|b_i\mathbf{b}\|_r\leq\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_q^2,\quad \forall\, i=1,2,3. \tag{2.66}$$

Com efeito, analisando a primeira desigualdade acima, encontramos, pela Desigualdade de Hölder, o seguinte:

$$\begin{aligned}
\|u_i\mathbf{u}\|_r &= \left(\int_{\mathbb{R}^3}|u_i|^r|\mathbf{u}|^r\,d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3}|u_i|^{2r}\,d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2r}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{u}|^{2r}\,d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2r}}\\
&= \|u_i\|_{2r}\|\mathbf{u}\|_{2r} \leq \|\mathbf{u}\|_{2r}\|\mathbf{u}\|_{2r}\\
&= \|\mathbf{u}\|_q^2 \leq \|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_q^2,
\end{aligned}\tag{2.67}$$

desde que $q=2r$. Do mesmo modo, verifica-se a segunda desigualdade em (2.66). Logo,

$$\|e^{\mu\Delta(t-s)}(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}-\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})\|_q \leq C_{q,\mu}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_q^2(t-s)^{-k}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_q &\leq \mu^{\frac{3}{2}}\|\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_q + C_{q,\mu}\int_{t_0}^t (t-s)^{-k}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_q^2\,ds \\ &\leq \mu^{\frac{3}{2}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_q + C_{q,\mu}\int_{t_0}^t (t-s)^{-k}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_q^2\,ds. \end{aligned}$$

Analogamente, através de (2.64), chega-se a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{b}(\cdot,t)\|_q &\leq \|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{b}(\cdot,t_0)\|_q + \int_{t_0}^t \|e^{\nu\Delta(t-s)}(-\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u})\|_q\,ds \\ &\leq \nu^{\frac{3}{2}}\|\mathbf{b}(\cdot,t_0)\|_q + \int_{t_0}^t \|e^{\nu\Delta(t-s)}(-\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u})\|_q\,ds, \end{aligned}$$

Notemos que,

$$\begin{aligned} \|e^{\nu\Delta(t-s)}(-\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u})\|_q &= \|e^{\nu\Delta(t-s)}\sum_{i=1}^3(-u_iD_i\mathbf{b}+b_iD_i\mathbf{u})\|_q \\ &\leq \sum_{i=1}^3 \|e^{\nu\Delta(t-s)}D_i(-u_i\mathbf{b}+b_i\mathbf{u})\|_q \\ &= \sum_{i=1}^3 \|D_ie^{\nu\Delta(t-s)}(-u_i\mathbf{b}+b_i\mathbf{u})\|_q \\ &\leq C_{q,\nu}(t-s)^{-\lambda-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^3\|-u_i\mathbf{b}+b_i\mathbf{u}\|_r, \end{aligned}$$

onde $\lambda = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)$. Na primeira desigualdade acima usamos que $\nabla\cdot\mathbf{u} = \nabla\cdot\mathbf{b} = 0$, na igualdade seguinte usamos o fato que a derivada comuta com o semigrupo $e^{\nu\Delta(t-s)}$ e na última das desigualdades utilizamos o Lema 4.10. Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \|e^{\nu\Delta(t-s)}(-\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u})\|_q &\leq C_{q,\nu}(t-s)^{-k}\sum_{i=1}^3(\|u_i\mathbf{b}\|_{L^r}+\|b_i\mathbf{u}\|_r) \\ &\leq C_{q,\nu}(t-s)^{-k}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_q^2, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade aplicamos estimativas análogas a (2.67). Consequentemente,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{b}(\cdot,t)\|_q &\leq \nu^{\frac{3}{2}}\|\mathbf{b}(\cdot,t_0)\|_q + C_{q,\nu}\int_{t_0}^t (t-s)^{-k}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_q^2\,ds \\ &\leq \nu^{\frac{3}{2}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_q + C_{q,\nu}\int_{t_0}^t (t-s)^{-k}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_q^2\,ds. \end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q &= \left(\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_q^q + \|\mathbf{b}(\cdot,t)\|_q^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_q + \|\mathbf{b}(\cdot,t)\|_q \\ &\leq (\mu^{\frac{3}{2}} + \nu^{\frac{3}{2}})\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_q + C_{q,\mu,\nu}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-k}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_q^2\,ds. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q \leq (\mu^{\frac{3}{2}} + \nu^{\frac{3}{2}})\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_q + C_{q,\mu,\nu}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-k}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,s)\|_q^2\,ds, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*.$$

□

Obs 2.1. É importante ressaltar aqui que o caso $q = \infty$ no Lema 2.3 é verdadeiro no caso $\mathbf{b} = 0$, i.e., quando estamos estudando as clássicas equações de Navier-Stokes (5). Para mais detalhes ver [28].

O teorema a seguir nos garante que uma solução $(\mathbf{u},\mathbf{b})$ do sistema (4) satisfaz o limite

$$\lim_{t \nearrow T^*} \|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q = \infty, \quad 3 < q < \infty, \tag{2.68}$$

se esta apresenta tempo de explosão finito. Se considerarmos o caso das equações de Navier-Stokes, o caso $q = \infty$ também é válido, ou seja,

$$\lim_{t \nearrow T^*} \|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_q = \infty, \quad 3 < q \leq \infty,$$

se $\mathbf{u}$ é uma solução de (5) que explode em $T^* < \infty$. (Ver (2.75)).

Teorema 2.6. *Seja $(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)$ solução forte do sistema (4) definida no intervalo maximal $[0,T^*)$. Assuma que $3 < q < \infty$. Se $T^* < \infty$, então existe uma constante positiva $C_{q,\mu,\nu}$, a qual depende somente de q,μ,ν, tal que*

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q \geq C_{q,\mu,\nu}(T^* - t)^{-\frac{q-3}{2q}}, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*.$$

Demonstração. Vimos no Lema 2.3 que

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q \leq (\mu^{\frac{3}{2}} + \nu^{\frac{3}{2}})\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_q + C_{q,\mu,\nu}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-k}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,s)\|_q^2\,ds, \tag{2.69}$$

onde $t_0 \leq t < T^*$, $3 < q < \infty$ e $k = \frac{3}{2q} + \frac{1}{2} < 1$. Além disso, pelo Teorema 2.5, também sabemos que

$$\sup_{0\leq t<T^*}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q=\infty, \tag{2.70}$$

desde que $T^*<\infty$.

Agora seja

$$\tau_*=\min\left\{T^*,t_0+\left[\frac{(1-k)(\lambda-1)}{C_{\mu,\nu}\lambda^2C_{q,\mu,\nu}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_q}\right]^{\frac{1}{1-k}}\right\}, \tag{2.71}$$

onde $C_{\mu,\nu}=\mu^{\frac{3}{2}}+\nu^{\frac{3}{2}}$ e $\lambda=1+C_{\mu,\nu}^{-1}$. Afirmamos que

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q<\lambda C_{\mu,\nu}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_q,\quad \forall\, t_0\leq t<\tau_*. \tag{2.72}$$

Com efeito, suponha, por absurdo, que existe $t_2\in[t_0,\tau_*)$ tal que

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_2)\|_q\geq\lambda C_{\mu,\nu}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_q.$$

Pela definição de λ, temos que

$$\lambda C_{\mu,\nu}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_q>\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_q.$$

Agora usufruindo do fato que $\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q$ é contínua, temos que existe $t_1<t_2$ tal que

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_1)\|_q=\lambda C_{\mu,\nu}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_q \tag{2.73}$$

e também

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q<\lambda C_{\mu,\nu}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_q,\quad \forall\, t_0\leq t<t_1. \tag{2.74}$$

Por aplicar (2.74) a (2.69), encontramos

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_1)\|_q &\leq C_{\mu,\nu}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_q+C_{q,\mu,\nu}\int_{t_0}^{t_1}(t_1-s)^{-k}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,s)\|_q^2\,ds\\ &< C_{\mu,\nu}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_q+C_{q,\mu,\nu}\lambda^2C_{\mu,\nu}^2\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_q^2\int_{t_0}^{t_1}(t_1-s)^{-k}\,ds.\end{aligned}$$

Dessa forma, por (2.73), obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda C_{\mu,\nu}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_q &< C_{\mu,\nu}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_q + C_{q,\mu,\nu}\lambda^2 C_{\mu,\nu}^2\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_q^2\frac{(t_1-t_0)^{1-k}}{1-k}\\
&< C_{\mu,\nu}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_q + C_{q,\mu,\nu}\lambda^2 C_{\mu,\nu}^2\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_q^2\frac{(\tau_*-t_0)^{1-k}}{1-k}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, por nossa escolha de τ_*, ver (2.71), temos que

$$\begin{aligned}
\lambda C_{\mu,\nu}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_q &< C_{\mu,\nu}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_q + C_{\mu,\nu}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_q(\lambda-1)\\
&= \lambda C_{\mu,\nu}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_q,
\end{aligned}$$

o que é um absurdo. Isto prova (2.72).

Observe que por (2.70), $\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q$ é ilimitada em $[0,T^*)$ e, por continuidade, esta mesma aplicação é limitada em $[0,t_0]$. Portanto, $\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q$ é ilimitada em $[t_0,T^*)$. Assim sendo, como (2.72) nos informa que $\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q$ é limitada em $[t_0,\tau_*)$ concluímos que $\tau_* < T^*$, i.e.,

$$\tau_* = t_0 + \left[\frac{(1-k)(\lambda-1)}{C_{\mu,\nu}\lambda^2 C_{q,\mu,\nu}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_q}\right]^{\frac{1}{1-k}},$$

ver (2.71). Com isso,

$$T^* > t_0 + \left[\frac{(1-k)(\lambda-1)}{C_{\mu,\nu}\lambda^2 C_{q,\mu,\nu}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_q\right]^{\frac{1}{1-k}},$$

ou equivalentemente,

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_q \geq \frac{(1-k)(\lambda-1)}{C_{\mu,\nu}\lambda^2 C_{q,\mu,\nu}}(T^*-t_0)^{-(1-k)}, \quad \forall\ 0 \leq t_0 < T^*.$$

Isto completa a prova do Teorema 2.6.

□

O caso $q=\infty$ no Teorema 2.6 é verdadeiro se considerarmos que o campo magnético $\mathbf{b}$ é nulo, ou seja, é válida a seguinte desigualdade:

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_\infty \geq C_{\infty,\mu}(T^*-t)^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*, \tag{2.75}$$

onde $\mathbf{u}$ é solução das equações de Navier-Stokes (5), se $T^* < \infty$. Esta afirmação segue da prova do Teorema 2.6 juntamente com a Observação 2.1. Como consequência imediata deste limite inferior temos que

$$\lim_{t\nearrow T^*} \|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_\infty = \infty,$$

se $T^* < \infty$. Além disso, pela Desigualdade (1.21)

$$\|v\|_\infty \le C_q \|v\|_2^{1-\theta} \|Dv\|_q^\theta, \quad \forall\, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3),$$

onde $\theta = \frac{3q}{5q-6}$ e $3 < q \le \infty$, podemos concluir

$$\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_q \ge C_q^{-\frac{1}{\theta}} \|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_2^{\frac{\theta-1}{\theta}} \|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_\infty^{\frac{1}{\theta}}.$$

Usando o Lema 2.1 e (2.75), temos que

$$\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_q \ge C_{q,\mu} \|\mathbf{u}_0\|_2^{-\frac{2q-6}{3q}} (T^*-t)^{-\frac{5q-6}{6q}}, \quad \forall\, 0 \le t < T^*, \tag{2.76}$$

se $T^* < \infty$ para $3 < q \le \infty$.

O resultado abaixo estabelece limites inferiores para $\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q$, quando $\frac{3}{2} < q \le 3$.

Corolário 2.7. *Seja* $(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)$ *solução forte do sistema* (4) *definida no intervalo maximal* $[0,T^*)$. *Assuma que* $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. *Se* $T^* < \infty$, *então existe uma constante positiva* $C_{\epsilon,\mu,\nu}$, *a qual depende somente de* ϵ, μ, ν *e* $\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2$, *tal que*

$$\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_3 \ge C_{\epsilon,\mu,\nu} (T^*-t)^{-\frac{1}{2}+\epsilon}, \quad \forall\, 0 \le t < T^*. \tag{2.77}$$

Além disso, para $\frac{3}{2} < q < 3$, *tem-se*

$$\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q \ge C_{q,\mu,\nu} (T^*-t)^{-\frac{2q-3}{2q}}, \quad \forall\, 0 \le t < T^*, \tag{2.78}$$

onde $C_{q,\mu,\nu}$ *é uma constante positiva que depende somente de* q, μ *e* ν.

Demonstração. Seja $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Assuma que $r = \frac{1+4\epsilon}{2\epsilon}$ $(3 < r < \infty)$. Pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg

$$\|v\|_r \le C_r \|v\|_2^{\frac{2}{r}} \|Dv\|_3^{1-\frac{2}{r}},$$

onde $3 \le r < \infty$ (ver 1.21), inferimos que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_r &\le C_r \|\mathbf{u}\|_2^{\frac{2}{r}} \|D\mathbf{u}\|_3^{1-\frac{2}{r}} \\ &\le C_r \|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_2^{\frac{2}{r}} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})\|_3^{1-\frac{2}{r}} \end{aligned}$$

e de forma análoga

$$\|\mathbf{b}\|_r \quad \leq \quad C_r \|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_2^{\frac{2}{r}} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})\|_3^{1-\frac{2}{r}}.$$

Somando estas duas desigualdades acima, chegamos a

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_r \leq C_r \|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_2^{\frac{2}{r}} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})\|_3^{1-\frac{2}{r}}.$$

Assim sendo, pelos Lemas 2.1 e Teorema 2.6, obtemos

$$\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_3 \geq C_{\epsilon,\mu,\nu} \|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2^{-4\epsilon} (T^* - t)^{-\frac{1}{2}+\epsilon}, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*, \tag{2.79}$$

se $T^* < \infty$. Isto completa a prova de (2.77).

Vamos utilizar a seguinte Desigualdade de Sobolev:

$$\|v\|_{\frac{3q}{3-q}} \leq C_q \|Dv\|_q, \quad \frac{3}{2} \leq q < 3. \tag{2.80}$$

Pelo Teorema 2.6, temos que

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_r \geq C_{r,\mu,\nu} (T^* - t)^{-\frac{r-3}{2r}}, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*,$$

sempre que $T^* < \infty$ e $3 < r < \infty$ Portanto, aplicando a Desigualdade de Sobolev (2.80), obtemos

$$\begin{aligned} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q \quad &\geq \quad C_q \|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_{\frac{3q}{3-q}} \\ &\geq \quad C_{q,\mu,\nu} (T^* - t)^{-\frac{2q-3}{2q}}, \end{aligned}$$

para qualquer $0 \leq t < T^*$ $(T^* < \infty)$. Aqui $3 < \frac{3q}{3-q} < \infty$, se $\frac{3}{2} < q < 3$. Isto estabelece (2.78). $\square$

Como consequência imediata do Corolário 2.7, temos que

$$\lim_{t \nearrow T^*} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q = \infty, \quad \frac{3}{2} < q \leq 3, \tag{2.81}$$

se $T^* < \infty$. No caso das equações de Navier-Stokes, temos o seguinte limite relacionado ao tempo finito de explosão:

$$\lim_{t \nearrow T^*} \|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_q = \infty, \quad \frac{3}{2} < q \leq \infty, \tag{2.82}$$

basta utilizar (2.76), (2.78) e (2.79).

Segue diretamente das desigualdades (2.76), (2.78) e (2.79) que, para as equações de Navier-Stokes (5), o seguinte resultado é válido:

$$\sup_{0\le t<T^*} \|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_q = \infty, \quad \frac{3}{2} < q \le \infty,$$

se $T^* < \infty$.

Corolário 2.8. *Seja $(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)$ solução forte do sistema (4) definida no intervalo maximal $[0,T^*)$. Assuma que $3 < r < \infty$ e $T^* < \infty$. Então,*

$$\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q \ge C_{r,q,\mu,\nu}(T^*-t)^{-\frac{(r-3)(5q-6)}{6q(r-2)}}, \quad \forall\, 0 \le t < T^*, \tag{2.83}$$

sempre que $\frac{3r}{r+3} \le q \le \infty$, onde $C_{r,q,\mu,\nu}$ é uma constante positiva que depende somente de r,q,μ,ν e $\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2$.

Demonstração. Pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg

$$\|v\|_r \le C_{r,q}\|v\|_2^{1-\theta}\|Dv\|_q^{\theta},$$

onde $\theta = \frac{6q(r-2)}{2r(5q-6)}$ e $\frac{3r}{r+3} \le q \le \infty$, tem-se que

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_r \le C_{r,q}\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2^{1-\theta}\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_q^{\theta},$$

é suficiente aplicar o Lema 2.1. Consequentemente,

$$\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_q \ge C_{r,q}\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2^{\frac{\theta-1}{\theta}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_r^{\frac{1}{\theta}}.$$

Já que $3 < r < \infty$ e $T^* < \infty$, concluímos, pelo Teorema 2.6, que

$$\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_q \ge C_{r,q,\mu,\nu}\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2^{\frac{\theta-1}{\theta}}(T^*-t)^{-\frac{(r-3)(5q-6)}{6q(r-2)}}, \quad \forall\, 0 \le t < T^*,$$

sempre que $\frac{3r}{r+3} \le q \le \infty$. Isto completa a prova do resultado. □

O Corolário 2.8 acima implica o seguinte limite:

$$\lim_{t\nearrow T^*} \|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q = \infty, \quad \forall\, 3 \le q \le \infty,$$

se $T^* < \infty$. Portanto, por (2.81), chegamos a

$$\lim_{t \nearrow T^*} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{u})(\cdot, t)\|_q = \infty, \quad \forall \frac{3}{2} < q \leq \infty,$$

no caso $T^* < \infty$.

Corolário 2.9. *Seja* $(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)$ *solução forte do sistema* (4) *definida no intervalo maximal* $[0, T^*)$. *Assuma que* $\frac{3}{2} < q \leq \infty$. *Se* $T^* < \infty$, *então*

$$\sup_{0 \leq t < T^*} \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot, t)\|_q = \infty.$$

Demonstração. A prova segue imediatamente das desigualdades (2.77), (2.78) e (2.83). □

2.6 Condições Suficientes para Existência Global e Explosão de $\|(D^n\mathbf{u}, D^n\mathbf{b})\|_q$

Nesta seção, demonstraremos algumas condições suficientes para que as soluções dos sistemas (4) e (5) sejam globalmente definidas no tempo. Além disso, exibiremos limites inferiores para as normas $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_3$, $\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_3$ e $\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\frac{3}{2}}$, onde a solução $\mathbf{u}(\cdot, t)$ das equações (5) goza de explosão em tempo finito. Por fim, mostraremos alguns limites inferiores, em tempo finito, para as normas $\|(D^n\mathbf{u}, D^n\mathbf{b})(\cdot, t)\|_q$ nos casos $n \geq 3$ com $1 \leq q \leq \infty$, e $n = 2$ com $1 < q \leq \infty$ (valendo $q = 1$ no caso das equações de Navier-Stokes (5)). Tais estimativas implicarão em explosão destas mesmas normas. Comecemos com uma desigualdade diferencial que desempenhará papel importante neste tópico.

Lema 2.4. *Seja* $(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)$ *solução forte do sistema* (4) *definida no intervalo maximal* $[0, T^*)$. *Assuma que* $3 < q < \infty$. *Então,*

$$\frac{d}{dt}\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_q^q \leq C_{q,\mu,\nu}\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_q^{\frac{q(q-1)}{q-3}}, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*,$$

onde $C_{q,\mu,\nu}$ *é uma constante positiva que depende somente de* q, μ *e* ν.

Demonstração. Notemos que, aplicando o divergente à primeira equação de (4), podemos escrever

$$-\Delta(p + \frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2) = \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}),$$

pois $\mathbf{u}$ é livre de divergente. Assim,

$$\begin{aligned}
-\Delta(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2) &= \nabla\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}-\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}) \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} D_i(u_jD_ju_i - b_jD_jb_i) \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} (D_iu_jD_ju_i + u_jD_iD_ju_i - D_ib_jD_jb_i - b_jD_iD_jb_i) \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} [D_iD_j(u_iu_j) - D_iD_j(b_ib_j)] \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} D_iD_j(u_iu_j - b_ib_j),
\end{aligned}$$

pois $\nabla\cdot\mathbf{u}=\nabla\cdot\mathbf{b}=0$. Pela teoria de Calderon-Zygmund aplicada à equação de Poisson acima (ver [19]), temos que

$$\begin{aligned}
\|p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2\|_r &\leq C_r\Big\|\sum_{i,j=1}^{3}[u_iu_j - b_ib_j]\Big\|_r \\
&\leq C_r\Big[\sum_{i,j=1}^{3}(\|u_iu_j\|_r + \|b_ib_j\|_r)\Big] \\
&\leq C_r(\|\mathbf{u}\|_{2r}^2 + \|\mathbf{b}\|_{2r}^2) \\
&\leq C_r\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_{2r}^2, \qquad (2.84)
\end{aligned}$$

onde $1<r<\infty$ (ver (2.67)). Dado $\delta>0$, sejam $L'_\delta(\cdot)$ uma função sinal regularizada e $\Phi_\delta(\cdot) := L_\delta(\cdot)^q$ ver (1.25). Multiplicando a linha i da primeira equação do sistema (4) por $\Phi'_\delta(u_i(\cdot,t))$ e integrando em $\mathbb{R}^3$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3}\Phi'_\delta(u_i)u_{it}\,d\mathbf{x} - \mu\int_{\mathbb{R}^3}\Phi'_\delta(u_i)\Delta u_i\,d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^3}\Phi'_\delta(u_i)(\mathbf{u}\cdot\nabla)u_i\,d\mathbf{x}$$

$$-\int_{\mathbb{R}^3}\Phi'_\delta(u_i)(\mathbf{b}\cdot\nabla)b_i\,d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^3}\Phi'_\delta(u_i)D_i(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)\,d\mathbf{x} = 0. \qquad (2.85)$$

Analisemos cada uma das integrais exibidas no lado esquerdo da igualdade acima. Com isso,

$$\int_{\mathbb{R}^3}\Phi'_\delta(u_i)u_{it}\,d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3}\frac{d}{dt}(\Phi_\delta(u_i))\,d\mathbf{x} = \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3}\Phi_\delta(u_i)\,d\mathbf{x}.$$

Fazendo $\delta \to 0$ e usando o Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi'_\delta(u_i) u_{it} \, d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \|u_i(\cdot, t)\|_q^q, \tag{2.86}$$

ver (1.25)-(1.31). Agora, notemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \Phi'_\delta(u_i) \Delta u_i \, d\mathbf{x} &= \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi'_\delta(u_i) D_j^2 u_i \, d\mathbf{x} \\
&= -\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} D_j[\Phi'_\delta(u_i)] D_j u_i \, d\mathbf{x} \\
&= -\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi''_\delta(u_i) (D_j u_i)^2 \, d\mathbf{x} \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3} \Phi''_\delta(u_i) |\nabla u_i|^2 \, d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Passando ao limite, quando $\delta \to 0$, e usando o Teorema da Convergência Dominada, concluímos que

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi'_\delta(u_i) \Delta u_i \, d\mathbf{x} = -q(q-1) \int_{\mathbb{R}^3} |u_i|^{q-2} |\nabla u_i|^2 \, d\mathbf{x}, \tag{2.87}$$

ver (1.25)-(1.31).

Observemos, agora, que, por integração por partes, chegamos a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \Phi'_\delta(u_i) (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i \, d\mathbf{x} &= \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi'_\delta(u_i) u_j D_j u_i \, d\mathbf{x} \\
&= \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} D_j[\Phi_\delta(u_i)] u_j \, d\mathbf{x} \\
&= -\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_\delta(u_i) D_j u_j \, d\mathbf{x} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \Phi'_\delta(u_i)(\mathbf{b} \cdot \nabla) b_i \, d\mathbf{x} &= \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi'_\delta(u_i) b_j D_j b_i \, d\mathbf{x} \\
&= -\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} D_j[\Phi'_\delta(u_i) b_j] b_i \, d\mathbf{x} \\
&= -\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} [\Phi''_\delta(u_i)(D_j u_i) b_j + \Phi'_\delta(u_i) D_j b_j] b_i \, d\mathbf{x} \\
&= -\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi''_\delta(u_i)(D_j u_i) b_j b_i \, d\mathbf{x},
\end{aligned}$$

pois $\mathbf{b}$ é livre de divergente. Passando ao limite, quando $\delta \to 0$, e usando o Teorema da Convergência Dominada, encontramos

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi'_\delta(u_i)(\mathbf{b} \cdot \nabla) b_i \, d\mathbf{x} = -q(q-1) \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |u_i|^{q-2} (D_j u_i) b_j b_i \, d\mathbf{x},$$

ver (1.25)-(1.31). Mas, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\begin{aligned}
-q(q-1) \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |u_i|^{q-2} (D_j u_i) b_j b_i \, d\mathbf{x} &= -q(q-1) \int_{\mathbb{R}^3} |u_i|^{q-2} \Big(\sum_{j=1}^{3} (D_j u_i) b_j \Big) b_i \, d\mathbf{x} \\
&\leq q(q-1) \int_{\mathbb{R}^3} |u_i|^{q-2} \Big(\sum_{j=1}^{3} |D_j u_i| |b_j| \Big) |b_i| \, d\mathbf{x} \\
&\leq q(q-1) \int_{\mathbb{R}^3} |u_i|^{q-2} \Big(\sum_{j=1}^{3} |D_j u_i|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{j=1}^{3} |b_j|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} |b_i| \, d\mathbf{x} \\
&= q(q-1) \int_{\mathbb{R}^3} |u_i|^{q-2} |\nabla u_i| |\mathbf{b}| |b_i| \, d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Além disso, pela Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} |u_i|^{q-2} |\nabla u_i| |\mathbf{b}| |b_i| \, d\mathbf{x} &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |u_i|^{q-2} |\nabla u_i| |\mathbf{b}|^2 \, d\mathbf{x} \\
&\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{b}|^4 |u_i|^{q-2} \, d\mathbf{x} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |u_i|^{q-2} |\nabla u_i|^2 \, d\mathbf{x} \Big)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \Big[\Big(\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{b}|^{q+2}\, d\mathbf{x}\Big)^{\frac{4}{q+2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |u_i|^{q+2}\, d\mathbf{x}\Big)^{\frac{q-2}{q+2}}\Big]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |u_i|^{q-2} |\nabla u_i|^2\, d\mathbf{x}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|\mathbf{b}\|_{q+2}^2 \|u_i\|_{q+2}^{\frac{q-2}{2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |u_i|^{q-2} |\nabla u_i|^2\, d\mathbf{x}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_{q+2}^2 \|u_i\|_{q+2}^{\frac{q-2}{2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |u_i|^{q-2} |\nabla u_i|^2\, d\mathbf{x}\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Portanto, passando ao limite, quando $\delta \to 0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi'_\delta(u_i)(\mathbf{b}\cdot\nabla) b_i\, d\mathbf{x} &= -q(q-1)\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |u_i|^{q-2} (D_j u_i) b_j b_i\, d\mathbf{x} \\
&\leq q(q-1)\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_{q+2}^2 \|u_i\|_{q+2}^{\frac{q-2}{2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |u_i|^{q-2} |\nabla u_i|^2\, d\mathbf{x}\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

A última das integrais em (2.85) nos diz que

$$
\int_{\mathbb{R}^3} \Phi'_\delta(u_i) D_i(p + \frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)\, d\mathbf{x} = -\int_{\mathbb{R}^3} \Phi''_\delta(u_i)(D_i u_i)(p + \frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)\, d\mathbf{x}.
$$

Passando ao limite, quando $\delta \to 0$, e usando o Teorema da Convergência Dominada, temos

$$
\lim_{\delta\to 0} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi'_\delta(u_i) D_i(p + \frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)\, d\mathbf{x} = -q(q-1)\int_{\mathbb{R}^3} |u_i|^{q-2}(D_i u_i)(p + \frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)\, d\mathbf{x}.
$$

Mas, pela Desigualdade de Hölder, é verdade que

$$
\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^3} |u_i|^{q-2}(D_i u_i)(p + \frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)\, d\mathbf{x} &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |u_i|^{q-2} |D_i u_i| |p + \frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2|\, d\mathbf{x} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} |u_i|^{q-2} |\nabla u_i| |p + \frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2|\, d\mathbf{x} \\
&\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |p + \frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2|^2 |u_i|^{q-2}\, d\mathbf{x}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |u_i|^{q-2} |\nabla u_i|^2\, d\mathbf{x}\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Utilizando a Desigualdade de Hölder novamente, obtemos

$$
\begin{aligned}
\Big(\int_{\mathbb{R}^3} |p + \frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2|^2 |\mathbf{u}_i|^{q-2}\, d\mathbf{x}\Big)^{\frac{1}{2}} &\leq \Big[\Big(\int_{\mathbb{R}^3} |p + \frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2|^{\frac{q+2}{2}}\, d\mathbf{x}\Big)^{\frac{4}{q+2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |u_i|^{q+2}\, d\mathbf{x}\Big)^{\frac{q-2}{q+2}}\Big]^{\frac{1}{2}} \\
&= \|p + \frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2\|_{\frac{q+2}{2}} \|u_i\|_{q+2}^{\frac{q-2}{2}}.
\end{aligned}
$$

Assim sendo,

$$-\int_{\mathbb{R}^3}|u_i|^{q-2}(D_iu_i)(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)\,d\mathbf{x} \quad\leq\quad \|p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2\|_{\frac{q+2}{2}}\|u_i\|_{q+2}^{\frac{q-2}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}^3}|u_i|^{q-2}|\nabla u_i|^2\,d\mathbf{x}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Pela desigualdade (2.84), chegamos a

$$-\int_{\mathbb{R}^3}|u_i|^{q-2}(D_iu_i)(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)\,d\mathbf{x}\leq C_q\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_{q+2}^2\|u_i\|_{q+2}^{\frac{q-2}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}^3}|u_i|^{q-2}|\nabla u_i|^2\,d\mathbf{x}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Por fim,

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{R}^3}\Phi'_\delta(u_i)D_i(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)\,d\mathbf{x} &= -\int_{\mathbb{R}^3}q(q-1)|u_i|^{q-2}(D_iu_i)(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)\,d\mathbf{x}\\ &\leq q(q-1)C_q\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_{q+2}^2\|u_i\|_{q+2}^{\frac{q-2}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}^3}|u_i|^{q-2}|\nabla u_i|^2\,d\mathbf{x}\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{2.88}$$

Deste modo, substituindo (2.86)-(2.88) em (2.85), obtemos

$$\frac{d}{dt}\|u_i\|_q^q+q(q-1)\mu\int_{\mathbb{R}^3}|u_i|^{q-2}|\nabla u_i|^2\,d\mathbf{x}\leq q(q-1)C_q\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_{q+2}^2\|u_i\|_{q+2}^{\frac{q-2}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}^3}|u_i|^{q-2}|\nabla u_i|^2\,d\mathbf{x}\Big)^{\frac{1}{2}}.\tag{2.89}$$

Agora apliquemos o mesmo processo à segunda equação do sistema (4). Multiplicando a linha i desta equação por $\Phi'_\delta(b_i(x,t))$ e integrando em $\mathbb{R}^3$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^3}\Phi'_\delta(b_i)b_{it}\,d\mathbf{x}-\nu\int_{\mathbb{R}^3}\Phi'_\delta(b_i)\Delta b_i\,d\mathbf{x}+\int_{\mathbb{R}^3}\Phi'_\delta(b_i)(\mathbf{u}\cdot\nabla)b_i\,d\mathbf{x}-\int_{\mathbb{R}^3}\Phi'_\delta(b_i)(\mathbf{b}\cdot\nabla)u_i\,d\mathbf{x}=0.\tag{2.90}$$

Por (2.86) e (2.87), obtemos

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{R}^3}\Phi'_\delta(b_i)b_{it}\,d\mathbf{x}=\frac{d}{dt}\|b_i(\cdot,t)\|_q^q$$

e também

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{R}^3}\Phi'_\delta(b_i)\Delta b_i\,d\mathbf{x}=-q(q-1)\int_{\mathbb{R}^3}|b_i|^{q-2}|\nabla b_i|^2\,d\mathbf{x}.$$

Analisemos as duas integrais restantes em (2.90). Notemos que,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \Phi'_\delta(b_i)(\mathbf{u}\cdot\nabla)b_i\,d\mathbf{x} &= \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} \Phi'_\delta(b_i)u_jD_jb_i\,d\mathbf{x} \\
&= -\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} D_j[\Phi'_\delta(b_i)u_j]b_i\,d\mathbf{x} \\
&= -\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} \Phi''_\delta(b_i)(D_jb_i)u_jb_i\,d\mathbf{x},
\end{aligned}$$

pois $\nabla\cdot\mathbf{u}=0$. Passando ao limite, quando $\delta\to 0$, e usando o Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{R}^3} \Phi'_\delta(b_i)(\mathbf{u}\cdot\nabla)b_i\,d\mathbf{x} = -q(q-1)\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|b_i|^{q-2}(D_jb_i)u_jb_i\,d\mathbf{x}.$$

Mas, pela Desigualdade de Cauchy-Scharwz,

$$\begin{aligned}
-q(q-1)\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|b_i|^{q-2}(D_jb_i)u_jb_i\,d\mathbf{x} &\leq q(q-1)\int_{\mathbb{R}^3}|b_i|^{q-2}|D_jb_i||u_j||b_i|\,d\mathbf{x} \\
&\leq q(q-1)\int_{\mathbb{R}^3}|b_i|^{q-2}|\nabla b_i||(\mathbf{u},\mathbf{b})|^2\,d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Utilizando a Desigualdade de Hölder, chegamos a

$$q(q-1)\int_{\mathbb{R}^3}|b_i|^{q-2}|\nabla b_i||(\mathbf{u},\mathbf{b})|^2\,d\mathbf{x} \leq q(q-1)\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_{q+2}^2\|b_i\|_{q+2}^{\frac{q-2}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|b_i|^{q-2}|\nabla b_i|^2\,d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{R}^3} \Phi'_\delta(b_i)(\mathbf{u}\cdot\nabla)b_i\,d\mathbf{x} &= -q(q-1)\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|b_i|^{q-2}(D_jb_i)u_jb_i\,d\mathbf{x} \\
&\leq q(q-1)\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_{q+2}^2\|b_i\|_{q+2}^{\frac{q-2}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|b_i|^{q-2}|\nabla b_i|^2\,d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Para última integral em (2.90), temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \Phi'_\delta(b_i)(\mathbf{b}\cdot\nabla)u_i\,d\mathbf{x} &= \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} \Phi'_\delta(b_i)b_jD_ju_i\,d\mathbf{x}\\
&= -\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} D_j[\Phi'_\delta(b_i)b_j]u_i\,d\mathbf{x}\\
&= -\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} \Phi''_\delta(b_i)(D_jb_i)b_ju_i\,d\mathbf{x},
\end{aligned}$$

desde que $\nabla\cdot\mathbf{b}=0$. Passando ao limite, quando $\delta\to 0$, e usando o Teorema da Convergência Dominada, encontramos

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{R}^3} \Phi'_\delta(b_i)(\mathbf{b}\cdot\nabla)u_i\,d\mathbf{x} = -q(q-1)\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|b_i|^{q-2}(D_jb_i)b_ju_i\,d\mathbf{x}.$$

Mas, pela Desigualdade de Cauchy-Scharwz, sabemos que

$$-q(q-1)\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|b_i|^{q-2}(D_jb_i)b_ju_i\,d\mathbf{x} \le q(q-1)\int_{\mathbb{R}^3}|b_i|^{q-2}|\nabla b_i||(\mathbf{u},\mathbf{b})|^2\,d\mathbf{x}.$$

Pela Desigualdade de Hölder, temos que

$$q(q-1)\int_{\mathbb{R}^3}|b_i|^{q-2}|\nabla b_i||(\mathbf{u},\mathbf{b})|^2\,d\mathbf{x} \le q(q-1)\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_{q+2}^2\|b_i\|_{q+2}^{\frac{q-2}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|b_i|^{q-2}|\nabla b_i|^2\,d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{R}^3} \Phi'_\delta(b_i)(\mathbf{b}\cdot\nabla)u_i\,d\mathbf{x} &= -q(q-1)\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|b_i|^{q-2}(D_jb_i)b_ju_i\,d\mathbf{x}\\
&\le q(q-1)\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_{q+2}^2\|b_i\|_{q+2}^{\frac{q-2}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|b_i|^{q-2}|\nabla b_i|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\frac{d}{dt}\|b_i\|_q^q + q(q-1)\nu\int_{\mathbb{R}^3}|b_i|^{q-2}|\nabla b_i|^2\,d\mathbf{x} \le 2q(q-1)\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_{q+2}^2\|b_i\|_{q+2}^{\frac{q-2}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|b_i|^{q-2}|\nabla b_i|^2\,d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.91}$$

Somando as desigualdades (2.89) e (2.91), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|(u_i,b_i)\|_q^q + q(q-1)\mu\int_{\mathbb{R}^3}|u_i|^{q-2}|\nabla u_i|^2\,d\mathbf{x} + q(q-1)\nu\int_{\mathbb{R}^3}|b_i|^{q-2}|\nabla b_i|^2\,d\mathbf{x}\\
&\le q(q-1)C_q\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_{q+2}^2\|u_i\|_{q+2}^{\frac{q-2}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u_i|^{q-2}|\nabla u_i|^2\,d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&+2q(q-1)\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_{q+2}^2\|b_i\|_{q+2}^{\frac{q-2}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|b_i|^{q-2}|\nabla b_i|^2\,d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}\tag{2.92}$$

Sejam $\mathbf{v}(x,t)=(v_1(x,t),v_2(x,t),v_3(x,t))$ e $\mathbf{r}(x,t)=(r_1(x,t),r_2(x,t),r_3(x,t))$ dados por

$$v_i(x,t):=|u_i(x,t)|^{\frac{q}{2}}\quad \text{e}\quad r_i(x,t):=|b_i(x,t)|^{\frac{q}{2}},\quad 1\le i\le 3,$$

Notemos que,

$$\|v_i\|_2^2=\|u_i\|_q^q \ \text{ e } \ \|r_i\|_2^2=\|b_i\|_q^q.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|(u_i,b_i)\|_q^q &= \|u_i\|_q^q+\|b_i\|_q^q.\\
&= \|v_i\|_2^2+\|r_i\|_2^2\\
&= \|(v_i,r_i)\|_2^2.
\end{aligned}$$

Passando a soma, quando consideramos $i=1,2,3$, obtemos

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_q^q=\|(\mathbf{v},\mathbf{r})\|_2^2.\tag{2.93}$$

Notemos ainda que,

$$|\nabla v_i|^2=\frac{q^2}{4}|u_i|^{q-2}|\nabla u_i|^2.\tag{2.94}$$

Analogamente,

$$|\nabla r_i|^2=\frac{q^2}{4}|b_i|^{q-2}|\nabla b_i|^2.\tag{2.95}$$

Aplicando as igualdades (2.94) e (2.95) em (2.92), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|(v_i,r_i)\|_2^2+4\mu\left(1-\frac{1}{q}\right)\|\nabla v_i\|_2^2+4\nu\left(1-\frac{1}{q}\right)\|\nabla r_i\|_2^2\\
&\le\ 2q\left(1-\frac{1}{q}\right)C_q\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_{q+2}^2\|u_i\|_{q+2}^{\frac{q-2}{2}}\|\nabla v_i\|_2+\ 4q\left(1-\frac{1}{q}\right)\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_{q+2}^2\|b_i\|_{q+2}^{\frac{q-2}{2}}\|\nabla r_i\|_2.
\end{aligned}$$

Por outro lado, é fácil checar, para $\beta := 2 + \frac{4}{q}$, que

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\|_{q+2}^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^{q+2}\,d\mathbf{x}\right)^{\frac{2}{q+2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_{i=1}^3 u_i^2\right)^{\frac{q+2}{2}} d\mathbf{x}\right)^{\frac{2}{q+2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_{i=1}^3 v_i^{\frac{4}{q}}\right)^{\frac{q+2}{2}} d\mathbf{x}\right)^{\frac{2}{q+2}} \\
&\le C_q \left(\sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} |v_i|^{2+\frac{4}{q}}\,d\mathbf{x}\right)^{\frac{2}{q+2}} \\
&= C_q \|\mathbf{v}\|_\beta^{\frac{4}{q}}.
\end{aligned}
$$

Além disso, segue diretamente da definição de v_i que

$$\|u_i\|_{q+2}^{\frac{q-2}{2}} = \|v_i\|_\beta^{\frac{q-2}{q}}, \quad \forall\, i = 1, 2, 3.$$

Analogamente, tem-se

$$\|\mathbf{b}\|_{q+2}^2 \le C_q \|\mathbf{r}\|_\beta^{\frac{4}{q}} \;\text{ e }\; \|b_i\|_{q+2}^{\frac{q-2}{2}} = \|r_i\|_\beta^{\frac{q-2}{q}}, \quad \forall\, i = 1, 2, 3.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})\|_{q+2}^{q+2} &:= \|\mathbf{u}\|_{q+2}^{q+2} + \|\mathbf{b}\|_{q+2}^{q+2} \\
&\le C_q \Big(\|\mathbf{v}\|_\beta^{\frac{2(q+2)}{q}} + \|\mathbf{r}\|_\beta^{\frac{2(q+2)}{q}}\Big) \\
&= C_q \|(\mathbf{v}, \mathbf{r})\|_\beta^{\frac{2(q+2)}{q}}.
\end{aligned}
$$

Por conseguinte,

$$\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})\|_{q+2}^2 \le C_q \|(\mathbf{v}, \mathbf{r})\|_\beta^{\frac{4}{q}}.$$

Deste modo,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|(v_i, r_i)\|_2^2 + 4\mu\left(1 - \frac{1}{q}\right)\|\nabla v_i\|_2^2 + 4\nu\left(1 - \frac{1}{q}\right)\|\nabla r_i\|_2^2 \\
&\le q\left(1 - \frac{1}{q}\right) C_q \|(\mathbf{v}, \mathbf{r})\|_\beta^{\frac{4}{q}} \|(v_i, r_i)\|_\beta^{\frac{q-2}{q}} \|(\nabla v_i, \nabla r_i)\|_2.
\end{aligned}
$$

Tomando $\gamma := \min\{\mu, \nu\}$, concluímos que

$$\frac{d}{dt}\|(v_i, r_i)\|_2^2 + 4\gamma\left(1 - \frac{1}{q}\right)\|(\nabla v_i, \nabla r_i)\|_2^2 \leq q\left(1 - \frac{1}{q}\right)C_q\|(\mathbf{v}, \mathbf{r})\|_\beta^{\frac{q+2}{q}}\|(\nabla v_i, \nabla r_i)\|_2.$$

Somando em $1 \leq i \leq 3$, obtemos

$$\frac{d}{dt}\|(\mathbf{v}, \mathbf{r})\|_2^2 + 4\gamma\left(1 - \frac{1}{q}\right)\|(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{r})\|_2^2 \leq q\left(1 - \frac{1}{q}\right)C_q\|(\mathbf{v}, \mathbf{r})\|_\beta^{\frac{q+2}{q}}\|(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{r})\|_2.$$

Utilizando a desigualdade

$$\|v\|_\beta \leq C_\beta\|v\|_2^{\frac{q-1}{q+2}}\|\nabla v\|_2^{\frac{3}{q+2}}, \quad \forall\, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3),$$

onde C_β é uma constante positiva depende somente de β, temos que

$$\frac{d}{dt}\|(\mathbf{v}, \mathbf{r})\|_2^2 + 4\gamma\left(1 - \frac{1}{q}\right)\|(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{r})\|_2^2 \leq q\left(1 - \frac{1}{q}\right)C_q\|(\mathbf{v}, \mathbf{r})\|_2^{\frac{q-1}{q}}\|(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{r})\|_2^{\frac{3+q}{q}}. \tag{2.96}$$

(Note que a prova da desigualdade acima vale para $2 < q < \infty$). Pela Desigualdade de Young, chegamos a

$$q\left(1 - \frac{1}{q}\right)C_q\|(\mathbf{v}, \mathbf{r})\|_2^{\frac{q-1}{q}}\|(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{r})\|_2^{\frac{3+q}{q}} \leq C_{q,\mu,\nu}\|(\mathbf{v}, \mathbf{r})\|_2^{\frac{2(q-1)}{q-3}} + 2\gamma\left(1 - \frac{1}{q}\right)\|(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{r})\|_2^2.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}\|(\mathbf{v}, \mathbf{r})\|_2^2 + 2\gamma\left(1 - \frac{1}{q}\right)\|(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{r})\|_2^2 \leq C_{q,\mu,\nu}\|(\mathbf{v}, \mathbf{r})\|_2^{\frac{2(q-1)}{q-3}}.$$

Por fim,

$$\frac{d}{dt}\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_q^q \leq C_{q,\mu,\nu}\left(\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_q^q\right)^{\frac{q-1}{q-3}}, \quad \forall\, 0 \leq\ t < T^*,$$

ver (2.93). Isto completa a prova do Lema 2.4. □

O resultado a seguir mostra que se o dado inicial de uma solução $(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)$ para o sistema (4) tem norma L^3 apropriadamente pequena então $\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_3$ é estritamente decrescente no seu intervalo de existência.

Corolário 2.10. *Seja* $(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)$ *solução forte do sistema* (4) *definida no intervalo maximal* $[0, T^*)$. *Assuma que*

$$\|(\mathbf{u}_0, \mathbf{b}_0)\|_3 < \frac{4}{3}\gamma C_3^{-1},$$

onde $\gamma = \min\{\mu, \nu\}$ *e* C_3 *é a constante dada em* (2.96). *Então,* $\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_3$ *é decrescente em* $0 \leq t < T^*$.

Demonstração. Tomando $q = 3$ em (2.96), encontramos

$$\frac{d}{dt}\|(\mathbf{v},\mathbf{r})\|_2^2 + \frac{8}{3}\gamma\|(\nabla\mathbf{v},\nabla\mathbf{r})\|_2^2 \leq 2C_3\|(\mathbf{v},\mathbf{r})\|_2^{\frac{2}{3}}\|(\nabla\mathbf{v},\nabla\mathbf{r})\|_2^2, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*, \tag{2.97}$$

Por hipótese, temos que

$$\|(\mathbf{v},\mathbf{r})(\cdot,0)\|_2 < \left(\frac{4}{3}\gamma C_3^{-1}\right)^{\frac{3}{2}},$$

ver definições de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{r}$. Por continuidade, existe $t_1 \in (0, T^*)$ tal que

$$\|(\mathbf{v},\mathbf{r})(\cdot,t)\|_2 < \left(\frac{4}{3}\gamma C_3^{-1}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \forall\, 0 \leq t \leq t_1.$$

Substituindo a estimativa acima em (2.97), obtemos

$$\frac{d}{dt}\|(\mathbf{v},\mathbf{r})\|_2^2 + \frac{8}{3}\gamma\|(\nabla\mathbf{v},\nabla\mathbf{r})\|_2^2 < \frac{8}{3}\gamma\|(\nabla\mathbf{v},\nabla\mathbf{r})\|_2^2, \quad \forall\, 0 \leq t \leq t_1,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\|(\mathbf{v},\mathbf{r})\|_2^2 < 0, \quad \forall\, 0 \leq t \leq t_1.$$

Com isso, $\|(\mathbf{v},\mathbf{r})\|_2$ é decrescente para $0 \leq t \leq t_1$. Logo,

$$\|(\mathbf{v},\mathbf{r})(\cdot,t_1)\|_2 < \|(\mathbf{v},\mathbf{r})(\cdot,0)\|_2 < \left(\frac{4}{3}\gamma C_3^{-1}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Por continuidade, existe $t_2 \in (t_1, T^*)$ tal que

$$\|(\mathbf{v},\mathbf{r})(\cdot,t)\|_2 < \left(\frac{4}{3}\gamma C_3^{-1}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \forall\, t_1 \leq t \leq t_2.$$

Substituindo a estimativa acima em (2.97), chegamos a

$$\frac{d}{dt}\|(\mathbf{v},\mathbf{r})\|_2^2 + \frac{8}{3}\gamma\|(\nabla\mathbf{v},\nabla\mathbf{r})\|_2^2 < \frac{8}{3}\gamma\|(\nabla\mathbf{v},\nabla\mathbf{r})\|_2^2, \quad \forall\, t_1 \leq t \leq t_2,$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}\|(\mathbf{v},\mathbf{r})\|_2^2 < 0, \quad \forall\, t_1 \leq t \leq t_2.$$

Com isso, $\|(\mathbf{v},\mathbf{r})(\cdot,t)\|_2$ é decrescente para $0 \leq t \leq t_2$. Seguindo esse processo teremos que $\|(\mathbf{v},\mathbf{r})(\cdot,t)\|_2$ será decrescente em $0 \leq t < T^*$. De forma equivalente, usando as definições de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{r}$, teremos que $\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_3$ é decrescente para $0 \leq t < T^*$. □

O Corolário 2.10 afirma que uma solução $\mathbf{u}(\cdot,t)$ das clássicas equações de Navier-Stokes (5) existe globalmente se

$$\|\mathbf{u}_0\|_3 < \frac{4}{3}\mu C_3^{-1}.$$

De fato, se $T^* < \infty$, teríamos, pelo Corolário 2.10, que

$$\|\mathbf{u}_0\|_3 > \|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_3, \quad \forall\, 0 < t < T^*.$$

Isto é uma contradição com o fato que

$$\lim_{t \nearrow T^*} \|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_3 = \infty, \quad T^* < \infty, \tag{2.98}$$

ver [42].

Vejamos abaixo mais algumas implicações provinientes desse mesmo limite acima

Corolário 2.11. *Seja* $\mathbf{u}(\cdot,t)$ *solução forte das equações de Navier-Stokes* (5) *definida no intervalo maximal* $[0,T^*)$. *Assuma que* $T^* < \infty$. *Então, são válidas as seguintes desigualdades:*

i) $\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_3 \geq \dfrac{4}{3}\mu C_3^{-1}, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*;$

ii) $\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\frac{3}{2}} \geq \dfrac{4}{3}\mu C C_3^{-1}, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*;$

iii) $\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_3 \geq C\Big(\dfrac{4}{3}\mu C_3^{-1}\Big)^3 \|\mathbf{u}_0\|_2^{-2}, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*;$

iv) $\sup\limits_{t\in[0,T^*)} \|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_3 = \infty.$

onde C_3 *é a constante dada em* (2.96) *e* C *provém da Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (2.99).*

Demonstração. Para provarmos **i)** suponhamos, por absurdo, que existe $t_1 \in [0,T^*)$ tal que $\|\mathbf{u}(\cdot,t_1)\|_3 < \frac{4}{3}\mu C_3^{-1}$. Como $T^* < \infty$, então

$$\lim_{t \nearrow T^*} \|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_3 = \infty,$$

ver [42]. Dessa forma, escolha $t_2 \in (t_1,T^*)$ tal que $\|\mathbf{u}(\cdot,t_2)\|_3 = \frac{4}{3}\mu C_3^{-1}$ e

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_3 \leq \frac{4}{3}\mu C_3^{-1}, \quad \forall\, t_1 \leq t \leq t_2.$$

Substituindo a desigualdade acima em (2.97), temos que

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_3^3 \le 0, \quad \forall\, t_1 \le t \le t_2.$$

Consequentemente,

$$\frac{4}{3}\mu C_3^{-1} = \|\mathbf{u}(\cdot,t_2)\|_3 \le \|\mathbf{u}(\cdot,t_1)\|_3.$$

Isto é um absurdo.

Vamos agora estabelecer uma prova para **ii)**. Por aplicar a Desigualdade de Sobolev

$$\|v\|_3 \le C\|Dv\|_{\frac{3}{2}}, \quad \forall\, v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3),$$

temos, por **i)**, que

$$\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\frac{3}{2}} \ge C\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_3 \ge C\frac{4}{3}\mu C_3^{-1}, \quad \forall\, 0 \le t < T^*.$$

Consideremos, agora, uma demonstração para **iii)**. Pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg

$$\|v\|_3 \le C\|v\|_2^{\frac{2}{3}}\|Dv\|_3^{1-\frac{2}{3}}, \quad \forall\, v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3), \tag{2.99}$$

e pelo Lema 2.1, temos que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_3 &\le C\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_2^{\frac{2}{3}}\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_3^{1-\frac{2}{3}} \\ &\le C\|\mathbf{u}_0\|_2^{\frac{2}{3}}\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_3^{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \tag{2.100}$$

Deste modo, por **i)**, conclui-se que

$$\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_3 \ge C\Big(\frac{4}{3}\mu C_3^{-1}\Big)^3\|\mathbf{u}_0\|_2^{-2}, \quad \forall\, 0 \le t < T^*.$$

É fácil ver que **iv)** segue diretamente de

$$\lim_{t\nearrow T^*}\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_3 = \infty$$

e (2.100), ver [42]. Isto completa a prova do Corolário 2.11.

$\square$

É importante ressaltar aqui que se $\mathbf{u}(\cdot,t)$ é a solução para as equações de Navier-Stokes (5) em

$[0, T^*)$, com $T^* < \infty$, então o Teorema 2.6, o limite inferior (2.75) e o Corolário 2.11 nos garantem que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_q \geq C_{q,\mu}(T^* - t)^{-\frac{q-3}{2q}}, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*, \tag{2.101}$$

para todo $3 \leq q \leq \infty$. Este mesmo teorema, (2.76), (2.77) e (2.78) nos mostram que

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_q \geq C_{q,\mu}\|\mathbf{u}_0\|_2^{-\frac{2q-6}{3q}}(T^* - t)^{-\frac{5q-6}{6q}}, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*,$$

onde $3 < q \leq \infty$,

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_q \geq C_{q,\mu}(T^* - t)^{-\frac{2q-3}{2q}}, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*,$$

onde $\frac{3}{2} \leq q < 3$, e também que

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_3 \geq C_{\epsilon,\mu}(T^* - t)^{-\frac{1}{2}+\epsilon}, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*,$$

$0 < \epsilon < \frac{1}{2}$.
Além disso, o Corolário 2.11 juntamente com (2.82) implicam

$$\lim_{t \nearrow T^*} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_q = \infty, \quad \frac{3}{2} \leq q \leq \infty.$$

O resultado abaixo exibe uma hipótese suficiente para termos existência global, com relação ao tempo, para as equações de Navier-Stokes (5).

Corolário 2.12. *Seja* $\mathbf{u}(\cdot, t)$ *solução forte das equações de Navier-Stokes* (5) *definida no intervalo maximal* $[0, T^*)$. *Assuma que* $T^* < \infty$. *Então,*

$$\sum_{i=1}^{3} \int_0^{T^*} \int_{\mathbb{R}^3} |u_i(\mathbf{x}, t)||\nabla u_i(\mathbf{x}, t)|^2 \, d\mathbf{x}dt = \infty.$$

Demonstração. Considere $q = 3$ em (2.96), assim

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\mathbf{v}\|_2^2 + \frac{8}{3}\mu\|D\mathbf{v}\|_2^2 &\leq 2C_3\|\mathbf{v}\|_2^{\frac{2}{3}}\|D\mathbf{v}\|_2^2 \\ &= 2C_3\|\mathbf{v}\|_2^{\frac{2}{3}}\|D\mathbf{v}\|_2^{\frac{2}{3}}\|D\mathbf{v}\|_2^{\frac{4}{3}}. \end{aligned}$$

Daí, pela Desigualdade de Young, temos que

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{v}\|_2^2 + \frac{8}{3}\mu\|D\mathbf{v}\|_2^2 \leq C_\mu\|\mathbf{v}\|_2^2\|D\mathbf{v}\|_2^2 + \frac{2}{3}\mu\|D\mathbf{v}\|_2^2.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{v}\|_2^2 + 2\mu\|D\mathbf{v}\|_2^2 \le C_\mu\|\mathbf{v}\|_2^2\|D\mathbf{v}\|_2^2.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{v}(\cdot,t)\|_2^2 \le C_\mu\|\mathbf{v}(\cdot,t)\|_2^2\|D\mathbf{v}(\cdot,t)\|_2^2, \quad \forall\, 0\le t<T^*.$$

Pelo Lema de Gronwall, obtemos

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_3^3 = \|\mathbf{v}(\cdot,t)\|_2^2 \le \|\mathbf{v}(\cdot,0)\|_2^2 \exp\Big(C_\mu \int_0^t \|D\mathbf{v}(\cdot,\tau)\|_2^2 d\tau\Big), \quad \forall\, 0\le t<T^*.$$

Com isso, se $\|D\mathbf{v}(\cdot,t)\|_2^2$ fosse integrável em $[0,T^*)$, então $\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_3$ seria limitada neste mesmo intervalo, o que não ocorre por (2.98), desde que $T^*<\infty$. Deste modo, $\|D\mathbf{v}(\cdot,t)\|_2^2$ não pode ser integrável em $[0,T^*)$, se $T^*<\infty$. Em termos de $\mathbf{u}(\cdot,t)$ temos

$$\sum_{i=1}^3\int_0^{T^*}\int_{\mathbb{R}^3}|u_i(\mathbf{x},t)||\nabla u_i(\mathbf{x},t)|^2\,d\mathbf{x}dt=\infty,$$

ver (2.94). □

O corolário abaixo nos mostra como estabelecer uma condição suficiente para termos existência global no tempo para as equações (4).

Corolário 2.13. *Seja* $(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)$ *solução forte do sistema* (4) *definida no intervalo maximal* $[0,T^*)$. *Assuma que* $3<q<\infty$ *e*

$$\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2^{\frac{2q-6}{3q-6}}\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_q^{\frac{q}{3q-6}} < (qC_qC_q^{'})^{-1}, \tag{2.102}$$

onde $\gamma=\min\{\mu,\nu\}$ *e* C_q *é a constante dada em* (2.96) *e* $C_q^{'}$ *provém da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg* (2.103) *abaixo. Então,* $\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q$ *é decrescente em* $0\le t<T^*$. *Em particular,* $T^*=\infty$ *se* (2.102) *for válida.*

Demonstração. Notemos que, para $q>3$, tem-se

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{v},\mathbf{r})\|_2^{\frac{q-1}{q}}\|(D\mathbf{v},D\mathbf{r})\|_2^{\frac{q+3}{q}} &= \|(\mathbf{v},\mathbf{r})\|_2^{\frac{2}{3q-6}}\|(\mathbf{v},\mathbf{r})\|_2^{\frac{3q-2}{3q-6}\left(1-\frac{3}{q}\right)}\|(D\mathbf{v},D\mathbf{r})\|_2^{\frac{q+3}{q}}\\ &\le C_q^{'}\|(\mathbf{v},\mathbf{r})\|_2^{\frac{2}{3q-6}}\|(\mathbf{v},\mathbf{r})\|_{\frac{4}{q}}^{\frac{4}{q}\cdot\frac{q-3}{3q-6}}\|(D\mathbf{v},D\mathbf{r})\|_2^2,\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos o fato que

$$\|v\|_2 \le C_r^{'}\|v\|_{\frac{4}{r}}^{1-\frac{3r-6}{3r-2}}\|Dv\|_2^{\frac{3r-6}{3r-2}}, \quad \forall\, v\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3). \tag{2.103}$$

(Aqui $2 \leq r < \infty$). Aplicando (2.96) e o Lema 2.1, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|(\mathbf{v},\mathbf{r})\|_2^2 + 4\gamma\Big(1-\frac{1}{q}\Big)\|(D\mathbf{v},D\mathbf{r})\|_2^2 &\leq q\Big(1-\frac{1}{q}\Big)C_qC_q^{'}\|(\mathbf{v},\mathbf{r})\|_2^{\frac{2}{3q-6}}\|(\mathbf{v},\mathbf{r})\|_{\frac{4}{q}}^{\frac{4}{q}\cdot\frac{q-3}{3q-6}}\|(D\mathbf{v},D\mathbf{r})\|_2^2 \\
&= q\Big(1-\frac{1}{q}\Big)C_qC_q^{'}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_2^{\frac{2q-6}{3q-6}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_q^{\frac{q}{3q-6}}\|(D\mathbf{v},D\mathbf{r})\|_2^2 \\
&\leq q\Big(1-\frac{1}{q}\Big)C_qC_q^{'}\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2^{\frac{2q-6}{3q-6}}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_q^{\frac{q}{3q-6}}\|(D\mathbf{v},D\mathbf{r})\|_2^2,
\end{aligned}$$

ver definições de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{r}$. Pelo mesmo argumento de continuidade usado na prova do Corolário 2.10, concluímos que $\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q$ é decrescente em $[0,T^*)$ se

$$\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2^{\frac{2q-6}{3q-6}}\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_q^{\frac{q}{3q-6}} < 2\gamma(qC_qC_q^{'})^{-1}.$$

Por fim, suponha, por absurdo, que $T^* < \infty$ e

$$\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2^{\frac{2q-6}{3q-6}}\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_q^{\frac{q}{3q-6}} < (qC_qC_q^{'})^{-1}.$$

Dessa forma, pelo que foi provado acima, concluímos que

$$\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_q > \|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q, \quad \forall\, 0 < t < T^*.$$

Isto é uma contradição com o fato que

$$\lim_{t\nearrow T^*}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q = \infty,$$

onde $3 < q < \infty$, $T^* < \infty$, ver (2.68). $\square$

O Corolário 2.13 também é válido para uma solução $\mathbf{u}(\cdot,t)$ das clássicas equações de Navier-Stokes (5) no caso $q = \infty$, ou seja,

$$\|\mathbf{u}_0\|_2^{\frac{2}{3}}\|\mathbf{u}_0\|_\infty^{\frac{1}{3}} < \eta_\infty \Rightarrow T^* = \infty,$$

onde η_∞ é apropriadamente pequeno (para mais detalhes ver [28]).

O corolário abaixo nos informa que o limite

$$\lim_{t\nearrow T^*}\|(D^2\mathbf{u},D^2\mathbf{b})\|_q = \infty, \quad \forall\, 1 < q < \frac{3}{2},$$

é verdadeiro para uma solução $(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)$ do sistema (4).

Corolário 2.14. *Seja* $(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)$ *solução forte do sistema* (4) *definida no intervalo maximal* $[0, T^*)$*. Assuma que* $1 < q < \frac{3}{2}$ *e* $T^* < \infty$*. Então,*

$$\|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{b})\|_q \geq C_{q,\mu,\nu}(T^* - t)^{-\frac{3q-3}{2q}}, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*,$$

$C_{q,\mu,\nu}$ *é a constante positiva que depende somente de* q, μ, ν*.*

Demonstração. Para $1 < q < \frac{3}{2}$, usando a desigualdade

$$\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})\|_{\frac{3q}{3-2q}} \leq C_q \|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{b})\|_q,$$

e o Teorema 2.6, temos que

$$\|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{b})\|_q \geq C_{q,\mu,\nu}(T^* - t)^{-\frac{3}{2}\cdot\frac{q-1}{q}}, \quad \forall\, t \in [0, T^*).$$

□

Se $\mathbf{u}(\cdot, t)$ é uma solução das equações de Navier-Stokes (5) temos também, pela desigualdade

$$\|\mathbf{u}\|_3 \leq C\|D^2\mathbf{u}\|_1 \tag{2.104}$$

e pelo Corolário 2.11, que

$$\|D^2\mathbf{u}(\cdot, t)\|_1 \geq C_\mu, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*,$$

se $T^* < \infty$. Passando ao limite, quando $t \nearrow T^*$ (com $T^* < \infty$), em (2.104) encontramos

$$\lim_{t \nearrow T^*} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, t)\|_1 = \infty,$$

basta usar o fato que $\lim\limits_{t \nearrow T^*} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_3 = \infty$.

Provaremos, logo a seguir, que os seguintes limites inferiores para uma solução $(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)$ do sistema (4) são verdadeiros:

$$\|(D^n\mathbf{u}, D^n\mathbf{b})\|_r \geq C_{q,r,n,\mu,\nu}(T^* - t)^{-\frac{(q-3)(3r+2nr-6)}{6r(q-2)}}, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*,$$

onde $n \geq 3$, $3 < q < \infty$, $1 \leq r \leq \infty$ e $C_{q,r,n,\mu,\nu}$ é uma constante positiva que depende somente de q, r, n, μ, ν e $\|(\mathbf{u}_0, \mathbf{b}_0)\|_2$. No caso $n = 2$, obtemos

$$\|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{b})\|_r \geq C_{q,r,\mu,\nu}(T^* - t)^{-\frac{(q-3)(7r-6)}{6r(q-2)}}, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*,$$

$3 < q < \infty$, $r \geq \frac{3q}{2q+3}$ e $C_{q,r,\mu,\nu}$ é uma constante positiva que depende somente de q, r, μ, ν e $\|(\mathbf{u}_0, \mathbf{b}_0)\|_2$.

Corolário 2.15. *Seja* $(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)$ *solução forte do sistema* (4) *definida no intervalo maximal* $[0, T^*)$. *Assuma que* $T^* < \infty$. *Então, se* $n \geq 3$, *tem-se*

$$\lim_{t \nearrow T^*} \|(D^n\mathbf{u}, D^n\mathbf{b})\|_q = \infty, \quad \forall\, 1 \leq q \leq \infty.$$

Também vale

$$\lim_{t \nearrow T^*} \|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{b})\|_q = \infty, \quad \forall\, 1 < q \leq \infty.$$

Demonstração. A seguir usaremos a seguinte Desigualdade de Gagliardo:

$$\|v\|_q \leq C_{q,r} \|v\|_2^{1-\theta} \|D^n v\|_r^{\theta}, \quad \forall\, v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3),$$

onde $\theta = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{2}+\frac{n}{3}-\frac{1}{r}}$, $r \geq \max\left\{1, \frac{3q}{nq+3}\right\}$, $n \geq 2$ e $3 \leq q \leq \infty$, se $(n,q,r) \neq \left(2, \infty, \frac{3}{2}\right)$ e $(n,q,r) \neq (3, \infty, 1)$. Pelo Lema 2.1, temos que

$$\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})\|_q \leq C_{q,r} \|(\mathbf{u}_0, \mathbf{b}_0)\|_2^{1-\theta} \|(D^n\mathbf{u}, D^n\mathbf{b})\|_r^{\theta}.$$

Daí,

$$\|(D^n\mathbf{u}, D^n\mathbf{b})\|_r \geq C_{q,r,n} \|(\mathbf{u}, \mathbf{b})\|_q^{\frac{1}{\theta}} \|(\mathbf{u}_0, \mathbf{b}_0)\|_2^{\frac{\theta-1}{\theta}}, \quad \forall\, r \geq \max\left\{1, \frac{3q}{nq+3}\right\}. \tag{2.105}$$

Se $n \geq 3$, temos que

$$\|(D^n\mathbf{u}, D^n\mathbf{b})\|_r \geq C_{q,r,n} \|(\mathbf{u}_0, \mathbf{b}_0)\|_2^{\frac{\theta-1}{\theta}} \|(\mathbf{u}, \mathbf{b})\|_q^{\frac{1}{\theta}}, \quad \forall\, r \geq 1.$$

Pelo Teorema 2.6 (considerando $3 < q < \infty$), concluímos que

$$\lim_{t \nearrow T^*} \|(D^n\mathbf{u}, D^n\mathbf{b})\|_r = \infty,$$

onde $1 \leq r \leq \infty$, $n \geq 3$.

Se $n = 2$ e $3 < q < \infty$, então, por (2.105) e Teorema 2.6 novamente, obtemos

$$\lim_{t \nearrow T^*} \|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{b})\|_r = \infty,$$

onde $r \geq \frac{3q}{2q+3}$. Por fim, no Corolário 2.14, vimos que

$$\|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{b})\|_r \geq C_{r,\mu,\nu}(T^* - t)^{-\frac{3r-3}{2r}}, \quad \forall\, t \in [0, T^*),$$

se $1 < r < \frac{3q}{2q+3}$, desde que $1 < \frac{3q}{2q+3} < \frac{3}{2}$. Com isso,

$$\lim_{t \nearrow T^*} \|(D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{b})\|_r = \infty,$$

onde $1 < r \leq \infty$. $\square$

2.7 Comparação das Taxas de Explosão

Nesta seção, demonstraremos que a taxa de explosão da norma $\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_r$ supera a de $\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_q$ se $3 < q < r < \infty$ ($3 \leq q < r \leq \infty$ no caso das equações de Navier-Stokes (5)). Além disso, mostraremos que $\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot, t)\|_2$ apresenta taxa de explosão superior a da norma $\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_q$, quando $2 \leq q \leq 6$. No caso das equações de Navier-Stokes (5), provaremos que $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_\infty^q \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_3$ explode mais rapidamente que $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_q^q \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_\infty^2$, se considerarmos $3 < q < \infty$. Nestes casos, suporemos que a solução $(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)$ (ou $\mathbf{u}(\cdot, t)$ em relação a (5)) exibe explosão em tempo finito.

Aqui também provaremos que

$$\sup_{0 \leq t < T^*} \left\{ \frac{\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_\infty^q \|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_3}{\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_q^q \|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_\infty^2} \right\} < \infty,$$

onde $3 < q < \infty$, é uma condição suficiente para que a solução $(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)$ do sistema (4), em $[0, T^*)$, seja globalmente definida no tempo (i.e., $T^* = \infty$).

Comecemos com o resultado abaixo, o qual mostra que

$$\lim_{t \nearrow T^*} \frac{\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_r}{\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_q} = \infty,$$

se $3 \leq q < r < \infty$ e $(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)$ é a solução do sistema (4) definida no intervalo maximal $[0, T^*)$ (com $T^* < \infty$).

Teorema 2.16. *Seja* $(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)$ *solução forte do sistema* (4) *definida no intervalo maximal* $[0, T^*)$. *Assuma que* $T^* < \infty$ *e* $3 \leq q < r < \infty$. *Então,*

$$\frac{\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_r}{\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_q} \geq C_{q,r,\mu,\nu}(T^* - t)^{-\gamma}, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*,$$

onde $\gamma = \frac{r-3}{r-2}\cdot\frac{r-q}{qr}$ *e* $C_{q,r,\mu,\nu}$ *é uma constante positiva que depende somente de* q, r, μ, ν *e* $\|(\mathbf{u}_0, \mathbf{b}_0)\|_2$.

Demonstração. Pela desigualdade de interpolação

$$\|v\|_q \leq \|v\|_2^{\lambda}\|v\|_r^{1-\lambda},$$

onde $0 < \lambda < 1$ e $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{2} + \frac{1-\lambda}{r}$, e Lema 2.1, temos que

$$\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})\|_q \leq \|(\mathbf{u}_0, \mathbf{b}_0)\|_2^{\lambda}\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})\|_r^{1-\lambda}.$$

Assim sendo, chegamos a

$$\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})\|_r^{\lambda} \leq \|(\mathbf{u}_0, \mathbf{b}_0)\|_2^{\lambda}\frac{\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})\|_r}{\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})\|_q}, \tag{2.106}$$

onde $\lambda = \frac{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}}$ (esta desigualdade é válida para $r = \infty$ também). Portanto, aplicando o Teorema 2.6, segue que

$$\frac{\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_r}{\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_q} \geq \frac{1}{\|(\mathbf{u}_0, \mathbf{b}_0)\|_2^{\lambda}} C_{r,\mu,\nu}^{\lambda}(T^* - t)^{-\lambda\cdot\frac{r-3}{2r}}, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*.$$

□

É importante destacar que se $\mathbf{u}(\cdot, t)$ é a solução das equações de Navier-Stokes (5) no intervalo de tempo $[0, T^*)$, com $T^* < \infty$, então

$$\frac{\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_r}{\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_q} \geq C_{q,r,\mu}(T^* - t)^{-\frac{r-3}{r-2}\cdot\frac{r-q}{qr}}, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*,$$

onde $3 \leq q < r \leq \infty$, e $C_{q,r,\mu}$ depende somente de q, r, μ e $\|\mathbf{u}_0\|_2$. A prova deste fato segue precisamente como na prova do Teorema 2.16 juntamente com (2.101). Como consequência imediata para a desigualdade acima temos o seguinte limite:

$$\lim_{t \nearrow T^*} \frac{\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_r}{\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_q} = \infty,$$

onde $T^* < \infty$ e $3 \leq q < r \leq \infty$.

Ainda considerando as equações de Navier-Stokes (5), temos o seguinte resultado.

Teorema 2.17. *Seja* $\mathbf{u}(\cdot, t)$ *solução forte do sistema* (5) *definida no intervalo maximal* $[0, T^*)$. *Assuma que* $T^* < \infty$ *e* $3 < q < \infty$. *Então,*

$$\lim_{t \nearrow T^*} \frac{\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_\infty^q}{\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_q^q} \cdot \frac{\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_3}{\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_\infty^2} = \infty.$$

Demonstração. Tomando $r = \infty$ e $\lambda = \frac{2}{q}$ em (2.106), temos

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_\infty^{\frac{2}{q}} \leq \|\mathbf{u}_0\|_2^{\frac{2}{q}} \frac{\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_\infty}{\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_q}.$$

Assim sendo, encontramos

$$\frac{\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_\infty^q}{\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_q^q} \cdot \frac{\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_3}{\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_\infty^2} \geq \frac{\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_3}{\|\mathbf{u}_0\|_2^2}.$$

Passando ao limite, quando $t \nearrow T^*$, concluímos que

$$\lim_{t \nearrow T^*} \frac{\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_\infty^q}{\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_q^q} \cdot \frac{\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_3}{\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_\infty^2} = \infty,$$

desde que $\lim\limits_{t \nearrow T^*} \|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_3 = \infty$ $(T^* < \infty)$. □

O teorema abaixo nos informa claramente que a solução $(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)$ das equações (4), definida no intervalo maximal $[0,T^*)$ (com $T^* < \infty$), satisfaz

$$\lim_{t \nearrow T^*} \frac{\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2}{\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q} = \infty, \quad \forall\, 2 \leq q < 6.$$

Teorema 2.18. *Seja $(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)$ solução forte do sistema (4) definida no intervalo maximal $[0,T^*)$. Assuma que $T^* < \infty$ e $2 \leq q \leq 6$. Então,*

$$\frac{\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2}{\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q} \geq C_{q,\mu,\nu}(T^* - t)^{-\frac{6-q}{8q}},$$

onde $C_{q,r,\mu,\nu}$ é uma constante positiva que depende somente de q, r, μ, ν e $\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2$.

Demonstração. Consideremos a desigualdade

$$\|v\|_q \leq C_q \|v\|_2^{1-\theta} \|Dv\|_2^{\theta}, \quad \forall\, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3),$$

onde $\theta = \frac{3}{2} \cdot \frac{q-2}{q}$ e $2 \leq q \leq 6$. Usando esta desigualdade, o Lema 2.1 e o Teorema 2.4, concluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2}{\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q} &\geq C_q \frac{\|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2{}^{1-\theta}}{\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2{}^{1-\theta}} \\
&\geq \frac{C_q}{\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2^{1-\theta}} \gamma^{\frac{3}{4}(1-\theta)} (T^* - t)^{-\frac{1}{4}(1-\theta)} \\
&\geq C_{q,\mu,\nu}(T^* - t)^{-\frac{6-q}{8q}},
\end{aligned}$$

onde $C_{q,\mu,\nu}$ depende somente de q, μ, ν e $\|(\mathbf{u}_0, \mathbf{b}_0)\|_2$ (desde que $T^* < \infty$). $\square$

O resultado a seguir nos garante que uma solução $(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)$ do sistema (4), no intervalo de tempo $[0, T^*)$, é global no tempo se

$$\sup_{0 \leq t < T^*} \left\{ \frac{\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_\infty^q}{\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_q^q} \cdot \frac{\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_3}{\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_\infty^2} \right\} < \infty,$$

onde $3 < q < \infty$.

Teorema 2.19. *Seja $(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)$ solução forte do sistema (4) definida no intervalo maximal $[0, T^*)$. Assuma que $T^* < \infty$ e $3 < q < \infty$. Então,*

$$\sup_{0 \leq t < T^*} \left\{ \frac{\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_\infty^q}{\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_q^q} \cdot \frac{\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_3}{\|(\mathbf{u}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_\infty^2} \right\} = \infty. \tag{2.107}$$

Demonstração. Através da primeira equação do sistema (4), temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_q^q &= \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^{q-2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_t \, d\mathbf{x} \\
&= \mu \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^{q-2} \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^{q-2} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \, d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^{q-2} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} \, d\mathbf{x} \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^{q-2} \mathbf{u} \cdot \nabla (p + \frac{1}{2} |\mathbf{b}|^2) \, d\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{2.108}$$

Permita-nos analisar as parcelas do lado direito das igualdades acima. Assim sendo, por integração por partes, encontramos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^{q-2} \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\mathbf{x} &= \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^{q-2} u_i D_j^2 u_i \, d\mathbf{x} \\
&= - \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} D_j (|\mathbf{u}|^{q-2} u_i) D_j u_i \, d\mathbf{x} \\
&= - \sum_{i,j,k=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} (q-2) |\mathbf{u}|^{q-4} (u_k D_j u_k)(u_i D_j u_i) \, d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^{q-2} \sum_{i,j=1}^{3} (D_j u_i)^2 \, d\mathbf{x} \\
&= -(q-2) \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^{q-4} (\mathbf{u} \cdot D_j \mathbf{u})^2 \, d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^{q-2} |D\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} \\
&\leq 0.
\end{aligned} \tag{2.109}$$

Além disso, por integração por partes novamente, chegamos a

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^{q-2}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\,d\mathbf{x} &= -\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^{q-2}u_iu_jD_ju_i\,d\mathbf{x}\\
&= \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} D_j(|\mathbf{u}|^{q-2}u_iu_j)u_i\,d\mathbf{x}\\
&= \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} D_j(|\mathbf{u}|^{q-2})u_i^2u_j\,d\mathbf{x} + \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^{q-2}D_j(u_iu_j)u_i\,d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Portanto, usando o fato que $\nabla\cdot\mathbf{u}=0$, obtemos

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^{q-2}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\,d\mathbf{x} &= \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}(q-2)|\mathbf{u}|^{q-4}\sum_{k=1}^{3}u_kD_ju_k\sum_{i=1}^{3}u_i^2u_j\,d\mathbf{x}\\
&\quad+\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{u}|^{q-2}[(D_ju_i)u_j+u_iD_ju_j]u_i\,d\mathbf{x}\\
&= \sum_{j,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}(q-2)|\mathbf{u}|^{q-4}(u_kD_ju_k)|\mathbf{u}|^2u_j\,d\mathbf{x}+\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{u}|^{q-2}(D_ju_i)u_ju_i\,d\mathbf{x}\\
&= (q-2)\sum_{j,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{u}|^{q-2}u_k(D_ju_k)u_j\,d\mathbf{x}+\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{u}|^{q-2}(D_ju_i)u_ju_i\,d\mathbf{x}\\
&= (q-1)\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{u}|^{q-2}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\,d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Deste modo,

$$-\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{u}|^{q-2}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}dx = 0. \tag{2.110}$$

Vejamos ainda que,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{u}|^{q-2}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{b}\,d\mathbf{x} &= \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{u}|^{q-2}u_ib_jD_jb_i\,d\mathbf{x}\\
&= -\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}D_j(|\mathbf{u}|^{q-2}u_ib_j)b_i\,d\mathbf{x}\\
&= -(q-2)\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{u}|^{q-4}\sum_{k=1}^{3}u_k(D_ju_k)u_ib_jb_i\,d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^{q-2} (D_j u_i) b_j b_i \, d\mathbf{x} \\
&= -(q-2) \sum_{j,k=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^{q-4} u_k (D_j u_k)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}) b_j \, d\mathbf{x} \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^{q-2} (D_j u_i) b_j b_i \, d\mathbf{x},
\end{aligned}
$$

onde na terceira igualdade usamos o fato que $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$. Consequentemente, utilizando a desigualdade de Cauchy-Scharwz, temos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^{q-2} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} \, d\mathbf{x} &\leq C_q \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^{q-2} |D\mathbf{u}| |\mathbf{b}|^2 \, d\mathbf{x} \\
&\leq C_q \|\mathbf{u}\|_{\infty}^{q-2} \int_{\mathbb{R}^3} |D\mathbf{u}| |\mathbf{b}|^2 \, d\mathbf{x}.
\end{aligned}
$$

Utilizando a Desigualdade de Hölder, concluímos que

$$
\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^{q-2} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} \, d\mathbf{x} \leq C_q \|\mathbf{u}\|_{\infty}^{q-2} \|D\mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{b}\|_4^2.
$$

Daí, usando a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg,

$$
\|v\|_4 \leq C \|v\|_3^{\frac{1}{2}} \|Dv\|_2^{\frac{1}{2}}, \quad \forall\, v \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3), \tag{2.111}
$$

temos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^{q-2} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} \, d\mathbf{x} &\leq C_q \|\mathbf{u}\|_{\infty}^{q-2} \|D\mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{b}\|_3 \|D\mathbf{b}\|_2 \\
&\leq C_q \|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_{\infty}^{q-2} \|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_3 \|(D\mathbf{u}, D\mathbf{b})\|_2^2. \qquad (2.112)
\end{aligned}
$$

Por fim, usando o fato que $\mathbf{u}$ é livre de divergente, chegamos a

$$
\begin{aligned}
- \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^{q-2} \mathbf{u} \cdot \nabla (p + \frac{1}{2} |\mathbf{b}|^2) \, d\mathbf{x} &= - \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^{q-2} u_j D_j (p + \frac{1}{2} |\mathbf{b}|^2) \, d\mathbf{x} \\
&= \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} D_j (|\mathbf{u}|^{q-2} u_j)(p + \frac{1}{2} |\mathbf{b}|^2) \, d\mathbf{x} \\
&= \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} D_j (|\mathbf{u}|^{q-2}) u_j (p + \frac{1}{2} |\mathbf{b}|^2) \, d\mathbf{x} \\
&= (q-2) \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^{q-4} (\mathbf{u} \cdot D_j \mathbf{u}) u_j (p + \frac{1}{2} |\mathbf{b}|^2) \, d\mathbf{x}.
\end{aligned}
$$

Usando a Desigualdade de Cauchy-Scharwz, obtemos

$$
\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^{q-2}\mathbf{u}\cdot\nabla(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)\,d\mathbf{x} &\leq C_q\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{u}|^{q-2}|D\mathbf{u}||p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2|\,d\mathbf{x}\\
&\leq C_q\|\mathbf{u}\|_\infty^{q-2}\int_{\mathbb{R}^3}|D\mathbf{u}||p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2|\,d\mathbf{x}.
\end{aligned}
$$

Utilizando a Desigualdade de Hölder, encontramos

$$
\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^{q-2}\mathbf{u}\cdot\nabla(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)\,d\mathbf{x} &\leq C_q\|\mathbf{u}\|_\infty^{q-2}\|D\mathbf{u}\|_2\Big\|p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2\Big\|_2\\
&\leq C_q\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty^{q-2}\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_2\Big\|p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2\Big\|_2.
\end{aligned}
$$

Por (2.84) e (2.111), concluímos que

$$
\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^{q-2}\mathbf{u}\cdot\nabla(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)\,d\mathbf{x} &\leq C_q\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty^{q-2}\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_2\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_4^2\\
&\leq C_q\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty^{q-2}\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_2\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_3\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_2\\
&= C_q\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty^{q-2}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_3\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_2^2. \qquad (2.113)
\end{aligned}
$$

Assim, aplicando as estimativas (2.109), (2.110), (2.112) e (2.113) em (2.108), obtemos

$$
\frac{1}{q}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_q^q \leq C_q\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty^{q-2}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_3\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_2^2. \qquad (2.114)
$$

Observando a segunda equação do sistema (4), temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{q}\frac{d}{dt}\|\mathbf{b}(\cdot,t)\|_q^q &= \int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{b}|^{q-2}\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}_t\,d\mathbf{x}\\
&= \nu\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{b}|^{q-2}\mathbf{b}\cdot\Delta\mathbf{b}\,d\mathbf{x}-\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{b}|^{q-2}\mathbf{b}\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{b}\,d\mathbf{x}\\
&\quad+\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{b}|^{q-2}\mathbf{b}\cdot(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{u}\,d\mathbf{x}. \qquad (2.115)
\end{aligned}
$$

Permita-nos analisar cada uma das parcelas do lado direito em (2.115). Por (2.109), sabemos que

$$
\nu\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{b}|^{q-2}\mathbf{b}\cdot\Delta\mathbf{b}dx\leq 0. \qquad (2.116)
$$

Notemos que,

$$
\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{b}|^{q-2}\mathbf{b}\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{b}\, d\mathbf{x} &= -\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{b}|^{q-2} b_i u_j D_j b_i\, d\mathbf{x} \\
&= \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} D_j(|\mathbf{b}|^{q-2} b_i u_j) b_i\, d\mathbf{x} \\
&= \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} (q-2)|\mathbf{b}|^{q-4}\sum_{k=1}^{3} b_k(D_j b_k) b_i u_j b_i\, d\mathbf{x} \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{b}|^{q-2}(D_j b_i) u_j b_i\, d\mathbf{x} \\
&= (q-2)\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{b}|^{q-4}(\mathbf{b}\cdot D_j\mathbf{b}) u_j |\mathbf{b}|^2\, d\mathbf{x} \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{b}|^{q-2}(D_j b_i) u_j b_i\, d\mathbf{x}.
\end{aligned}
$$

Utilizando a Desigualdade de Cauchy-Scharwz, temos que

$$
\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{b}|^{q-2}\mathbf{b}\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{b}\, d\mathbf{x} &\leq C_q\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{b}|^{q-2}|D\mathbf{b}||(\mathbf{u},\mathbf{b})|^2\, d\mathbf{x} \\
&\leq C_q\|\mathbf{b}\|_\infty^{q-2}\int_{\mathbb{R}^3} |D\mathbf{b}||(\mathbf{u},\mathbf{b})|^2\, d\mathbf{x}.
\end{aligned}
$$

Através da Desigualdade de Hölder, concluímos que

$$
-\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{b}|^{q-2}\mathbf{b}\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{b} dx \leq C_q\|\mathbf{b}\|_\infty^{q-2}\|D\mathbf{b}\|_2\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_4^2.
$$

Daí, usando a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (2.111), obtemos

$$
\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{b}|^{q-2}\mathbf{b}\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{b}\, d\mathbf{x} &\leq C_q\|\mathbf{b}\|_\infty^{q-2}\|D\mathbf{b}\|_2\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_3\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_2 \\
&\leq C_q\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty^{q-2}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_3\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_2^2. \qquad (2.117)
\end{aligned}
$$

Analogamente, prova-se que

$$
\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{b}|^{q-2}\mathbf{b}\cdot(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{u}\, d\mathbf{x} \leq C_q\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty^{q-2}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_3\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_2^2 \qquad (2.118)
$$

Por fim, aplicando as estimativas (2.116), (2.117) e (2.118) em (2.115), chegamos a

$$
\frac{1}{q}\frac{d}{dt}\|\mathbf{b}\|_q^q \leq C_q\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty^{q-2}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_3\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_2^2. \qquad (2.119)
$$

Deste modo, somando as desigualdades (2.114) e (2.119), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_q^q &\leq C_q\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty^{q-2}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_3\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_2^2 \\ &= C_q\frac{\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty^q}{\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_q^q}\frac{\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_3}{\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty^2}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_q^q\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_2^2\end{aligned}$$

Suponha, por absurdo, que

$$M := \sup_{0\leq t<T^*}\left\{\frac{\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty^q}{\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_q^q}\cdot\frac{\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_3}{\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_\infty^2}\right\} < \infty.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_q^q \leq C_qM\|(\mathbf{u},\mathbf{b})\|_q^q\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_2^2.$$

Aplicando o Lema de Gronwall e Lema 2.1, obtemos

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_q &\leq \|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_q\exp\left(C_qM\int_0^t\|(D\mathbf{u},D\mathbf{b})\|_2^2d\tau\right) \\ &\leq \|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_q\exp\left(C_{q,\mu,\nu}M\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{b}_0)\|_2^2\right),\end{aligned}$$

onde $0\leq t<T^*$ e $3<q<\infty$. Isto contradiz (2.68). Portanto, a igualdade (2.107) é válida. □

2.8 Critério de Explosão Beale-Kato-Majda

Em toda esta seção consideraremos que $\mathbf{u}(\cdot,t)$ é a solução forte do sistema (5) definida no intervalo maximal $[0,T^*)$. Com esta solução em mãos, definimos o fluxo vorticidade através da igualdade

$$\boldsymbol{\xi}(\cdot,t) := \nabla\times\mathbf{u}(\cdot,t), \quad \forall\, 0\leq t<T^*,$$

o qual satisfaz a seguinte equação

$$\boldsymbol{\xi}_t(\cdot,t)+\mathbf{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\xi}(\cdot,t) = \mu\Delta\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)+\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,t), \quad \forall\, 0\leq t<T^*, \tag{2.120}$$

basta aplicar o operador rotacional em (5). Tal equação é denominada equação da vorticidade.

Vamos começar mostrando um lema que garante que a norma L^2 da vorticidade resulta em $\|D\mathbf{u}\|_2$.

Lema 2.5. *Seja* $\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)$ *a vorticidade, definida em* $t \geq 0$. *Então,*

$$\|\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_2 = \|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_2, \quad t \geq 0.$$

Demonstração. Com efeito, pela Identidade de Parseval,

$$\begin{aligned}
\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_2^2 &= \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot,t)\|_2^2 = \sum_{j=1}^{3} \|D_j \mathbf{u}(\cdot,t)\|_2^2 \\
&= \sum_{j=1}^{3} \|\widehat{D_j \mathbf{u}(\cdot,t)}\|_2^2 = \sum_{j=1}^{3} \|k_j \hat{\mathbf{u}}(\cdot,t)\|_2^2 \\
&= \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |k_j \hat{\mathbf{u}}(\cdot,t)|^2 \, dk = \int_{\mathbb{R}^3} |k|^2 |\hat{\mathbf{u}}(\cdot,t)|^2 \, dk \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{\boldsymbol{\xi}}(k,t)|^2 \, dk = \int_{\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{\xi}(x,t)|^2 \, dx \\
&= \|\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_2^2.
\end{aligned}$$

□

O resultado acima é útil para provarmos as seguintes estimativas de decaimento.

Teorema 2.20. *As seguintes afirmações envolvendo a vorticidade* $\boldsymbol{\xi}(\cdot,t) = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)(\cdot,t)$, *no intervalo de tempo* $[0,T^*)$, *são válidas:*

i) *Se* $\xi_i(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^3)$ *para algum* $i = 1,2,3$, *então* $\xi_i(\cdot,t)$ *permanece em* $L^1(\mathbb{R}^3)$ *para* $t \in [0,T^*)$, *com*

$$\|\xi_i(\cdot,t)\|_1 \leq \|\xi_i(\cdot,0)\|_1 + \frac{1}{2\mu}\|\mathbf{u}_0\|_2^2, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*;$$

ii) *Se* $\boldsymbol{\xi}(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^3)$, *então*

$$\|\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_1 \leq \|\boldsymbol{\xi}(\cdot,0)\|_1 + \frac{\sqrt{3}}{2\mu}\|\mathbf{u}_0\|_2^2, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*.$$

Demonstração. Note que a i-ésima componente da equação (2.120) é dada por

$$\xi_{it} + \mathbf{u} \cdot \nabla \xi_i = \mu \Delta \xi_i + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla u_i.$$

Multiplicando esta mesma equação pela função sinal regularizadora $L'_\delta(\xi_i(\cdot,t))$ e integrando em $\mathbb{R}^3\times[0,t]$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^t L'_\delta(\xi_i)\xi_{i\tau}\,d\tau d\mathbf{x}+\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^t L'_\delta(\xi_i)\mathbf{u}\cdot\nabla\xi_i\,d\tau d\mathbf{x}=\mu\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^t L'_\delta(\xi_i)\Delta\xi_i\,d\tau d\mathbf{x}+\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^t L'_\delta(\xi_i)\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla u_i\,d\tau d\mathbf{x}.$$

Vamos analisar cada uma das integrais que compõe a igualdade acima. Assim sendo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\int_0^t L'_\delta(\xi_i)\xi_{i\tau}d\tau=\int_0^t\frac{d}{d\tau}[L_\delta(\xi_i)]d\tau=L_\delta(\xi_i(\cdot,t))-L_\delta(\xi_i(\cdot,0)).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}L'_\delta(\xi_i)\Delta\xi_i\,d\mathbf{x}&=\sum_{j=1}^3\int_{\mathbb{R}^3}L'_\delta(\xi_i)D_j^2\xi_i\,d\mathbf{x}\\&=-\sum_{j=1}^3\int_{\mathbb{R}^3}D_j[L'_\delta(\xi_i)]D_j\xi_i\,d\mathbf{x}\\&=-\sum_{j=1}^3\int_{\mathbb{R}^3}L''_\delta(\xi_i)(D_j\xi_i)^2\,d\mathbf{x}\\&=-\int_{\mathbb{R}^3}L''_\delta(\xi_i)|\nabla\xi_i|^2\,d\mathbf{x}\\&\le 0.\end{aligned}$$

Também temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}L'_\delta(\xi_i)\mathbf{u}\cdot\nabla\xi_i\,d\mathbf{x}&=\sum_{j=1}^3\int_{\mathbb{R}^3}L'_\delta(\xi_i)u_jD_j\xi_i\,d\mathbf{x}\\&=\sum_{j=1}^3\int_{\mathbb{R}^3}D_j[L_\delta(\xi_i)]u_j\,d\mathbf{x}\\&=-\sum_{j=1}^3\int_{\mathbb{R}^3}L_\delta(\xi_i)D_ju_j\,d\mathbf{x}\\&=0,\end{aligned}$$

pois $\nabla\cdot\mathbf{u}=0$. Deste modo,

$$\int_{\mathbb{R}^3}[L_\delta(\xi_i(\cdot,t))-L_\delta(\xi_i(\cdot,0))]\,d\mathbf{x}\le\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^t L'_\delta(\xi_i)\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla u_i\,d\tau d\mathbf{x}.$$

Passando ao limite, quando $\delta\to 0$, e usando o Teorema da Convergência Dominada, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\xi_i(\cdot,t)|\, d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\xi_i(\cdot,0)|\, d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t |\xi_j||D_j u_i|\, d\tau d\mathbf{x},$$

isto é,

$$\|\xi_i(\cdot,t)\|_1 \leq \|\xi_i(\cdot,0)\|_1 + \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t |\xi_j||D_j u_i|\, d\tau d\mathbf{x}. \tag{2.121}$$

Utilizando as Desigualdades de Hölder e Cauchy-Scharwz, obtemos

$$\begin{aligned} \|\xi_i(\cdot,t)\|_1 &\leq \|\xi_i(\cdot,0)\|_1 + \sum_{j=1}^{3} \int_0^t \Big[\Big(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi_j|^2\, d\mathbf{x} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |D_j u_i|^2\, d\mathbf{x} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big]\, d\tau \\ &= \|\xi_i(\cdot,0)\|_1 + \int_0^t \Big[\Big(\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi_j|^2\, d\mathbf{x} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |D_j u_i|^2\, d\mathbf{x} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big]\, d\tau \\ &\leq \|\xi_i(\cdot,0)\|_1 + \int_0^t \|\boldsymbol{\xi}\|_2 \|D\mathbf{u}\|_2\, d\tau \end{aligned}$$

Daí, usando os Lemas 2.5 e 2.1, concluímos que

$$\begin{aligned} \|\xi_i(\cdot,t)\|_1 &\leq \|\xi_i(\cdot,0)\|_1 + \int_0^t \|D\mathbf{u}\|_2^2\, d\tau \\ &\leq \|\xi_i(\cdot,0)\|_1 + \frac{1}{2\mu} \|\mathbf{u}_0\|_2^2, \end{aligned}$$

para todo $0 \leq t < T^*$. O que prova o item **i)**.

Agora somando em $1 \leq i \leq 3$ em (2.121), encontramos

$$\sum_{i=1}^{3} \|\xi_i(\cdot,t)\|_1 \leq \sum_{i=1}^{3} \|\xi_i(\cdot,0)\|_1 + \sum_{i,j=1}^{3} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\xi_j||D_j u_i|\, d\mathbf{x} d\tau.$$

Aplicando as Desigualdades de Hölder e Cauchy-Scharwz, novamente, obtemos

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_1 &\leq \|\boldsymbol{\xi}(\cdot,0)\|_1 + \sum_{i,j=1}^{3} \int_0^t \Big[\Big(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi_j|^2\, d\mathbf{x} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |D_j u_i|^2\, d\mathbf{x} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big]\, d\tau \\ &\leq \|\boldsymbol{\xi}(\cdot,0)\|_1 + \int_0^t \Big[\Big(\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi_j|^2\, d\mathbf{x} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |D_j u_i|^2\, d\mathbf{x} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big]\, d\tau \\ &\leq \|\boldsymbol{\xi}(\cdot,0)\|_1 + \sqrt{3} \int_0^t \|\boldsymbol{\xi}\|_2 \|D\mathbf{u}\|_2\, d\tau. \end{aligned}$$

Assim, pelos Lemas 2.5 e 2.1, concluímos que

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_1 &\leq \|\boldsymbol{\xi}(\cdot,0)\|_1 + \sqrt{3}\int_0^t \|D\mathbf{u}\|_2^2\,d\tau \\ &\leq \|\boldsymbol{\xi}(\cdot,0)\|_1 + \frac{\sqrt{3}}{2\mu}\|\mathbf{u}_0\|_2^2,\end{aligned}$$

para todo $0 \leq t < T^*$. O que prova **ii)**. □

O resultado a seguir nos mostra uma condição suficiente, envolvendo a vorticidade, que implica a existência global da solução das equações de Navier-Stokes (5).

Teorema 2.21 (Beale-Kato-Majda)**.** *Seja $\boldsymbol{\xi}(\cdot,t) = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)(\cdot,t)$ a vorticidade, definida no intervalo de tempo $[0,T^*)$. Se $T^* < \infty$, então*

$$\int_0^{T^*} \|\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_\infty\,dt = \infty.$$

Demonstração. Vamos estudar a i-ésima componente da equação (2.120) novamente, a qual nos informa que

$$\xi_{it} + \mathbf{u}\cdot\nabla\xi_i = \mu\Delta\xi_i + \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla u_i.$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\xi_i(\cdot,t)\|_2^2 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\xi_i,\xi_i)_2 \\ &= (\xi_i,\xi_{it})_2 \\ &= -(\xi_i,\mathbf{u}\cdot\nabla\xi_i)_2 + \mu(\xi_i,\Delta\xi_i)_2 + (\xi_i,\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla u_i)_2.\end{aligned}$$

Analisemos cada parcela obtida no lado direito das igualdades acima. Vejamos, primeiramente, que

$$\begin{aligned}(\xi_i,\mathbf{u}\cdot\nabla\xi_i)_2 &= \sum_{j=1}^3(\xi_i,u_jD_j\xi_i)_2 \\ &= -\sum_{j=1}^3(D_j(\xi_iu_j),\xi_i)_2 \\ &= -\sum_{j=1}^3((D_j\xi_i)u_j + \xi_i(D_ju_j),\xi_i)_2 \\ &= -\sum_{j=1}^3(u_jD_j\xi_i,\xi_i)_2 \\ &= -(\mathbf{u}\cdot\nabla\xi_i,\xi_i)_2,\end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade usamos que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Logo,

$$(\xi_i, \mathbf{u} \cdot \nabla \xi_i)_2 = 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
(\xi_i, \Delta \xi_i)_2 &= \sum_{j=1}^{3} (\xi_i, D_j^2 \xi_i)_2 \\
&= -\sum_{j=1}^{3} (D_j \xi_i, D_j \xi_i)_2 \\
&= -\|D\xi_i\|_2^2
\end{aligned}$$

e também

$$(\xi_i, \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla u_i)_2 = \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \xi_i \xi_j D_j u_i \, d\mathbf{x}.$$

Deste modo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\xi_i(\cdot,t)\|_2^2 = -\mu\|D\xi_i(\cdot,t)\|_2^2 + \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \xi_i \xi_j D_j u_i \, d\mathbf{x}.$$

Somando em $1 \leq i \leq 3$, chegamos a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_2^2 + \mu\|D\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_2^2 &= \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \xi_i \xi_j D_j u_i \, d\mathbf{x} \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi_i||\xi_j||D_j u_i| \, d\mathbf{x} \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{\xi}||\xi_j||D_j u_i| \, d\mathbf{x} \\
&\leq \|\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_\infty \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi_j||D_j u_i| \, d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Utilizando as Desigualdades de Hölder e Cauchy-Scharwz, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_2^2 + \mu\|D\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_2^2 &\leq \|\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_\infty \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi_j|^2 \, d\mathbf{x} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |D_j u_i|^2 \, d\mathbf{x} \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_\infty \Big(\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi_j|^2 \, d\mathbf{x} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |D_j u_i|^2 \, d\mathbf{x} \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{3}\|\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_\infty \|\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_2 \|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_2.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.5, concluímos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_2^2 + \mu\|D\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_2^2 \leq \sqrt{3}\|\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_\infty\|\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_2^2, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*.$$

Daí, pelo Lema de Gronwall, chegamos a

$$\|\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_2^2 \leq \|\boldsymbol{\xi}(\cdot,0)\|_2^2 \exp\left\{2\sqrt{3}\int_0^t \|\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_\infty\, d\tau\right\}, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*.$$

Suponha, por absurdo que

$$\int_0^{T^*} \|\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_\infty\, dt < \infty,$$

então, pela desigualdade acima, $\|\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_2$ seria limitada em $[0,T^*)$. Pelo Lema 2.5, teríamos que $\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_2$ seria limitada em $[0,T^*)$. Contradizendo o Teorema 2.4. Portanto,

$$\int_0^{T^*} \|\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_\infty\, dt = \infty.$$

□

A partir da proposição abaixo é fácil concluir o seguinte limite:

$$\lim_{t \nearrow T^*} \|D^n\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_2 = \infty, \quad n \geq 0,$$

se $T^* < \infty$. Isto segue diretamente do Teorema 2.4 e Corolário 2.15.

Proposição 2.3. *Seja $\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)$ a vorticidade, definida em $t \geq 0$. Então,*

$$\|D^{n+1}\mathbf{u}(\cdot,t)\|_2 = \|D^n\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_2, \quad t \geq 0,\, n \geq 0.$$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
\|D^{n+1}\mathbf{u}(\cdot,t)\|_2^2 &= \sum_{|\beta|=n} \|D(D^\beta\mathbf{u})\|_2^2 \\
&= \sum_{|\beta|=n} \|\nabla \times (D^\beta\mathbf{u})\|_2^2 \\
&= \sum_{|\beta|=n} \|D^\beta\boldsymbol{\xi}\|_2^2 \\
&= \|D^n\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_2^2.
\end{aligned}$$

□

Para finalizar este capítulo, use a proposição abaixo em ordem a encontrar o limite:

$$\lim_{t \nearrow T^*} \|D^n \boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_q = \infty, \quad n > 0, 1 < q < \infty,$$

se $T^* < \infty$. É suficiente aplicar o Teorema 2.4 e o Corolário 2.15. Além disso,

$$\lim_{t \nearrow T^*} \|\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_q = \infty, \quad \frac{3}{2} < q < \infty$$

basta usar (2.82) e Corolário (2.15).

Proposição 2.4. *Seja $\boldsymbol{\xi}(\cdot,t)$ a vorticidade, definida em $t \geq 0$. Então,*

$$\|D^{n+1}\mathbf{u}(\cdot,t)\|_q \leq C_{q,n}\|D^n \boldsymbol{\xi}(\cdot,t)\|_q, \quad t \geq 0,\, n \geq 0,$$

onde $1 < q < \infty$ e $C_{q,n}$ é uma constante positiva que depende somente de q e n.

Demonstração. Ver [18]. □

Capítulo 3

Propriedades de Soluções para as Equações Magneto-micropolares

Neste capítulo, apresentaremos limites inferiores para a solução do sistema (1) envolvendo Espaços de Lebesgue usuais e Espaços de Sobolev Homogêneos. É importante lembrar neste ponto que o Teorema 0.1 garante a existência de uma única solução forte para o sistema (1).

3.1 Limite Inferior Envolvendo $\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_{\dot{H}^s}$, $s > \frac{1}{2}$

Neste seção, supondo que a solução $(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)$ de (1) definida no intervalo de tempo $[0,T^*)$ apresenta tempo de explosão $t = T^*$ finito, estabeleceremos o seguinte limite:

$$\lim_{t \nearrow T^*} \|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_{\dot{H}^s} \|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2^{\frac{2s}{1+2\delta}-1} = \infty,$$

para $\delta \in (0,1)$ e $s \geq \frac{1}{2} + \delta$. Mais precisamente, encontraremos o limite inferior abaixo:

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_{\dot{H}^s} \|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2^{\frac{2s}{1+2\delta}-1} \geq C(T^*-t)^{-\frac{s\delta}{1+2\delta}}, \quad \forall\, t \in [0,T^*),$$

se $\delta \in (0,1)$ e $s \geq \frac{1}{2} + \delta$.

Em ordem a estabelecermos uma prova para o resultado principal desta seção (Teorema 3.1) precisaremos do seguinte lema, o qual generaliza uma parte do Lema 2.1 para as equações magneto-micropolares.

Lema 3.1. *Seja* $(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)$ *solução forte do sistema* (1) *definida no intervalo maximal* $[0,T^*)$.

Portanto,

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2 \leq \|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t_0)\|_2, \quad \forall\, 0 \leq t_0 \leq t < T^*. \tag{3.1}$$

Demonstração. Sabemos que,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|_2^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{b}\|_2^2. \tag{3.2}$$

Vamos estudar separadamente cada uma das derivadas expostas no lado direito da igualdade acima. Assim sendo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|_2^2 &= (\mathbf{u},\mathbf{u}_t)_2 \\ &= (\mathbf{u}, -\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} - \nabla(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2) + (\mu+\chi)\Delta\mathbf{u} + \mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b} + \chi\nabla\times\mathbf{w})_2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Pela demonstração do Lema 2.1, temos que

$$-(\mathbf{u},\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})_2 = -(\mathbf{u},\nabla(p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2)_2 = 0 \quad \text{e} \quad (\mu+\chi)(\mathbf{u},\Delta\mathbf{u})_2 = -(\mu+\chi)\|D\mathbf{u}\|_2^2. \tag{3.4}$$

Aplicando (3.4) em (3.3), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|_2^2 + (\mu+\chi)\|D\mathbf{u}\|_2^2 = (\mathbf{u},\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})_2 + \chi(\mathbf{u},\nabla\times\mathbf{w})_2. \tag{3.5}$$

Agora, vejamos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_2^2 &= (\mathbf{w},\mathbf{w}_t)_2 \\ &= (\mathbf{w}, -\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{w} + \gamma\Delta\mathbf{w} + \kappa\nabla(\nabla\cdot\mathbf{w}) + \chi\nabla\times\mathbf{u} - 2\chi\mathbf{w})_2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Pela demonstração do Lema 2.1, temos também que

$$-(\mathbf{w},\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{w})_2 = 0 \quad \text{e} \quad \gamma(\mathbf{w},\Delta\mathbf{w})_2 = -\gamma\|D\mathbf{w}\|_2^2. \tag{3.7}$$

Notemos que,

$$\begin{aligned}(\mathbf{w},\kappa\nabla(\nabla\cdot\mathbf{w}))_2 &= \kappa\sum_{j=1}^{3}(w_j, D_j(\nabla\cdot\mathbf{w}))_2 \\ &= -\kappa\sum_{j=1}^{3}(D_j w_j, \nabla\cdot\mathbf{w})_2 \\ &= -\kappa(\nabla\cdot\mathbf{w},\nabla\cdot\mathbf{w})_2 \\ &= -\kappa\|\nabla\cdot\mathbf{w}\|_2^2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Assim, por substituir (3.7) e (3.8) em (3.6), encontramos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_2^2 + \gamma\|D\mathbf{w}\|_2^2 + \kappa\|\nabla\cdot\mathbf{w}\|_2^2 + 2\chi\|\mathbf{w}\|_2^2 = \chi(\mathbf{w}, \nabla\times\mathbf{u}). \tag{3.9}$$

Por fim, analisando a terceira equação de (1), chegamos a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{b}\|_2^2 &= (\mathbf{b}, \mathbf{b}_t)_2 \\ &= (\mathbf{b}, -\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b} + \nu\Delta\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u})_2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Utilizando a demonstração do Lema 2.1, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{b}\|_2^2 + \nu\|D\mathbf{b}\|_2^2 = (\mathbf{b}, \mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u})_2. \tag{3.11}$$

Somando as igualdades (3.5), (3.9) e (3.11), concluímos que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|_2^2 + (\mu+\chi)\|D\mathbf{u}\|_2^2 + \gamma\|D\mathbf{w}\|_2^2 + \nu\|D\mathbf{b}\|_2^2 + \kappa\|\nabla\cdot\mathbf{w}\|_2^2 + 2\chi\|\mathbf{w}\|_2^2 \\ &= (\mathbf{u}, \mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})_2 + \chi(\mathbf{u}, \nabla\times\mathbf{w})_2 + \chi(\mathbf{w}, \nabla\times\mathbf{u})_2 + (\mathbf{b}, \mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u})_2. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Segue da demonstração do Lema 2.1 que

$$(\mathbf{u}, \mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})_2 + (\mathbf{b}, \mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u})_2 = 0. \tag{3.13}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|_2^2 + (\mu+\chi)\|D\mathbf{u}\|_2^2 + \gamma\|D\mathbf{w}\|_2^2 + \nu\|D\mathbf{b}\|_2^2 + \kappa\|\nabla\cdot\mathbf{w}\|_2^2 + 2\chi\|\mathbf{w}\|_2^2 \\ &= \chi(\mathbf{u}, \nabla\times\mathbf{w})_2 + \chi(\mathbf{w}, \nabla\times\mathbf{u})_2. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Usando as igualdades

$$(\mathbf{u}, \nabla\times\mathbf{w})_2 = (\mathbf{w}, \nabla\times\mathbf{u})_2 \quad \text{e} \quad \|\nabla\times\mathbf{u}\|_2 = \|D\mathbf{u}\|_2 \,\text{(ver Lema 2.5)},$$

e também por aplicar as Desigualdades de Cauchy e Young, concluímos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|_2^2 + \mu\|D\mathbf{u}\|_2^2 + \gamma\|D\mathbf{w}\|_2^2 + \nu\|D\mathbf{b}\|_2^2 + \kappa\|\nabla\cdot\mathbf{w}\|_2^2 + \chi\|\mathbf{w}\|_2^2 \leq 0.$$

Consequentemente,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|_2^2 \leq 0, \quad \forall\, 0 \leq t < T^*. \tag{3.15}$$

Integrando (3.15) de t_0 a t ($t_0 \leq t < T^*$), concluímos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que

$$\|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_2 \leq \|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, t_0)\|_2, \quad \forall\, 0 \leq t_0 \leq t < T^*.$$

Isto completa a prova do lema em questão. $\square$

É importante ressaltar aqui que, se a solução $(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, t)$ de (1) em $[0, T^*)$ apresenta tempo de explosão $t = T^*$ finito, então o Lema 3.1 e o teorema abaixo implicam que

$$\|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_{\dot{H}^s} \geq C\|(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \mathbf{b}_0)\|_2^{1-\frac{2s}{1+2\delta}}(T^* - t)^{-\frac{s\delta}{1+2\delta}}, \quad \forall\, t \in [0, T^*),$$

para $\delta \in (0, 1)$ e $s \geq \frac{1}{2} + \delta$.

Teorema 3.1. *Fixe $s_0 > \frac{3}{2}$ e seja $(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \mathbf{b}_0) \in H^{s_0}(\mathbb{R}^3)$ tal que $\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = \nabla \cdot \mathbf{b}_0 = 0$. Considere que $(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, t) \in C([0, T^*), H^s(\mathbb{R}^3))$ é solução forte de (1), definida no intervalo maximal $[0, T^*)$. Assuma que $T^* < \infty$. Então, para cada $\delta \in (0, 1)$ e $s \geq \frac{1}{2} + \delta$, temos que*

$$\|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_{\dot{H}^s}\|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_2^{p(s,\delta)} \geq C_{s,\delta,\mu,\nu,\gamma}\, \alpha^{q(s,\delta)}(T^* - t)^{-r(s,\delta)}, \quad \forall\, t \in [0, T^*), \tag{3.16}$$

onde $\alpha = \min\{\mu, \nu, \gamma\}$, $C_{s,\delta,\mu,\nu,\gamma}$ é uma constante positiva que depende somente de $s, \delta, \mu, \nu, \gamma$; e

$$p(s, \delta) := \frac{2s}{1 + 2\delta} - 1, \quad q(s, \delta) := \frac{(2 - \delta)s}{1 + 2\delta} \quad e \quad r(s, \delta) := \frac{s\delta}{1 + 2\delta}.$$

Demonstração. Primeiramente vamos aplicar o produto interno $(\mathbf{u}, \cdot)_{\dot{H}^s}$ na primeira equação do sistema (1) em ordem a obter

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}^2 &= \frac{1}{2}[(\mathbf{u}_t, \mathbf{u})_{\dot{H}^s} + (\mathbf{u}, \mathbf{u}_t)_{\dot{H}^s}] \\
&= \mathrm{Re}\Big[- (\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\dot{H}^s} - (\nabla(p + \frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2), \mathbf{u})_{\dot{H}^s} + (\mu + \chi)(\Delta\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\dot{H}^s} \\
&\quad + (\mathbf{b} \cdot \nabla\mathbf{b}, \mathbf{u})_{\dot{H}^s} + \chi(\nabla \times \mathbf{w}, \mathbf{u})_{\dot{H}^s}\Big],
\end{aligned} \tag{3.17}$$

onde $\mathrm{Re}[z]$ é a parte real do número complexo z. Permita-nos analisar algumas das parcelas encontradas no lado direito das igualdades acima. Assim sendo,

$$
\begin{aligned}
(\Delta \mathbf{u}, \mathbf{u})_{\dot{H}^s} &= \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{k}|^{2s} \widehat{\Delta \mathbf{u}} \cdot \widehat{\mathbf{u}}\, d\mathbf{k} \\
&= \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{k}|^{2s} \widehat{D_j^2 \mathbf{u}} \cdot \widehat{\mathbf{u}}\, d\mathbf{k} \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{k}|^{2s} |\mathbf{k}|^2 |\widehat{\mathbf{u}}|^2\, d\mathbf{k} \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{k}|^{2s} |\widehat{\nabla \mathbf{u}}|^2\, d\mathbf{k} \\
&= -\|\nabla \mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}^2 .
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

Notemos também que,

$$
\begin{aligned}
(\nabla(p + \frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2), \mathbf{u})_{\dot{H}^s} &= \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{k}|^{2s} (\nabla(p + \frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2))^\wedge \cdot \widehat{\mathbf{u}}\, d\mathbf{k} \\
&= \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{k}|^{2s} (D_j(p + \frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2))^\wedge \overline{\widehat{u_j}} d\mathbf{k} \\
&= \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{k}|^{2s} i k_j (p + \frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2) \overline{\widehat{u_j}}\, d\mathbf{k} \\
&= -\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{k}|^{2s} (p + \frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2) \overline{i k_j \widehat{u_j}}\, d\mathbf{k} \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{k}|^{2s} (p + \frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2) \overline{\widehat{\nabla \cdot \mathbf{u}}}\, d\mathbf{k} \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

pois $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Além disso, conclui-se

$$
\begin{aligned}
-(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{u})_{\dot{H}^s} &= -\sum_{j=1}^{3} (u_j D_j \mathbf{u}, \mathbf{u})_{\dot{H}^s} \\
&= -\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{k}|^{2s} (u_j D_j \mathbf{u})^\wedge \cdot \widehat{\mathbf{u}}\, d\mathbf{k} \\
&= -\sum_{l,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{k}|^{2s} (u_j D_j u_l)^\wedge \overline{\widehat{u_l}}\, d\mathbf{k}.
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

Usando o fato que $\mathbf{u}$ é livre de divergente, chegamos a

$$\begin{aligned}
-(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u},\mathbf{u})_{\dot{H}^s} &= -\sum_{l,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{k}|^{2s}(D_j(u_ju_l))^\wedge\overline{\widehat{u}_l}\,d\mathbf{k}\\
&= \sum_{l,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{k}|^{2s}\widehat{u_ju_l}\overline{ik_j\widehat{u}_l}\,d\mathbf{k}\\
&= \sum_{l,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{k}|^{2s}\widehat{u_ju_l}\overline{\widehat{D_ju_l}}\,d\mathbf{k}\\
&= \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{k}|^{2s}\widehat{u_j\mathbf{u}}\cdot\overline{\widehat{D_j\mathbf{u}}}\,d\mathbf{k}\\
&= (\mathbf{u}\otimes\mathbf{u},\nabla\mathbf{u})_{\dot{H}^s},
\end{aligned}\tag{3.21}$$

onde $\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}=(u_1\mathbf{u},u_2\mathbf{u},u_3\mathbf{u})$. Do mesmo modo, chegamos a

$$(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b},\mathbf{u})_{\dot{H}^s}=-(\mathbf{b}\otimes\mathbf{b},\nabla\mathbf{u})_{\dot{H}^s}.\tag{3.22}$$

Com isso, substituindo os resultados encontrados em (3.18), (3.19), (3.20), (3.21) e (3.22) em (3.17), encontramos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|^2_{\dot{H}^s}=\mathrm{Re}[(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u},\nabla\mathbf{u})_{\dot{H}^s}-(\mu+\chi)\|\nabla\mathbf{u}\|^2_{\dot{H}^s}-(\mathbf{b}\otimes\mathbf{b},\nabla\mathbf{u})_{\dot{H}^s}+\chi(\nabla\times\mathbf{w},\mathbf{u})_{\dot{H}^s}],$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|^2_{\dot{H}^s}+(\mu+\chi)\|\nabla\mathbf{u}\|^2_{\dot{H}^s}=\mathrm{Re}[(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u},\nabla\mathbf{u})_{\dot{H}^s}]-\mathrm{Re}[(\mathbf{b}\otimes\mathbf{b},\nabla\mathbf{u})_{\dot{H}^s}]+\chi\mathrm{Re}[(\nabla\times\mathbf{w},\mathbf{u})_{\dot{H}^s}].\tag{3.23}$$

Agora, apliquemos o mesmo processo à segunda equação do sistema (1). Com efeito, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|^2_{\dot{H}^s} &= \frac{1}{2}[(\mathbf{w}_t,\mathbf{w})_{\dot{H}^s}+(\mathbf{w},\mathbf{w}_t)_{\dot{H}^s}]\\
&= \mathrm{Re}[-(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{w},\mathbf{w})_{\dot{H}^s}+\gamma(\Delta\mathbf{w},\mathbf{w})_{\dot{H}^s}+\kappa(\nabla(\nabla\cdot\mathbf{w}),\mathbf{w})_{\dot{H}^s}+\chi(\nabla\times\mathbf{u},\mathbf{w})_{\dot{H}^s}\\
&\quad -2\chi(\mathbf{w},\mathbf{w})_{\dot{H}^s}].
\end{aligned}\tag{3.24}$$

Permita-nos analisar algumas das parcelas encontradas no lado direito das igualdades acima. Primeiramente vejamos que,

$$\begin{aligned} -\left(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{w},\mathbf{w}\right)_{\dot{H}^s} &= \sum_{j=1}^{3}\left(u_j D_j\mathbf{w},\mathbf{w}\right)_{\dot{H}^s} \\ &= -\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{k}|^{2s}(u_jD_j\mathbf{w})^\wedge\cdot\widehat{\mathbf{w}}\,d\mathbf{k} \\ &= -\sum_{l,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{k}|^{2s}(u_jD_jw_l)^\wedge\overline{\widehat{w_l}}\,d\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

É fácil obter as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \sum_{l,j=1}^{3}(u_jD_jw_l)^\wedge\overline{\widehat{w_l}} &= \sum_{l,j=1}^{3}(D_j(u_jw_l))^\wedge\overline{\widehat{w_l}} \\ &= \sum_{l,j=1}^{3} ik_j\widehat{u_jw_l}\overline{\widehat{w_l}} \\ &= -\sum_{l,j=1}^{3}\widehat{u_jw_l}\overline{\widehat{D_jw_l}} \\ &= -\sum_{j=1}^{3}\widehat{u_j\mathbf{w}}\cdot\widehat{D_j\mathbf{w}} \\ &= -\widehat{\mathbf{w}\otimes\mathbf{u}}\cdot\widehat{\nabla\mathbf{w}}, \end{aligned} \tag{3.26}$$

onde usamos que $\nabla\cdot\mathbf{u}=0$ e $\mathbf{w}\otimes\mathbf{u}=(u_1\mathbf{w},u_2\mathbf{w},u_3\mathbf{w})$. Substituindo (3.26) em (3.25), concluímos que

$$\begin{aligned} -\left(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{w},\mathbf{w}\right)_{\dot{H}^s} &= \int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{k}|^{2s}\widehat{\mathbf{w}\otimes\mathbf{u}}\cdot\widehat{\nabla\mathbf{w}}\,d\mathbf{k} \\ &= \left(\mathbf{w}\otimes\mathbf{u},\nabla\mathbf{w}\right)_{\dot{H}^s}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Analogamente ao que fizemos em (3.18), obtemos

$$(\Delta\mathbf{w},\mathbf{w})_{\dot{H}^s} = -\|\nabla\mathbf{w}\|^2_{\dot{H}^s}. \tag{3.28}$$

Notemos ainda que,

$$\begin{aligned}
(\nabla(\nabla\cdot\mathbf{w}),\mathbf{w})_{\dot{H}^s} &= \int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{k}|^{2s}(\nabla(\nabla\cdot\mathbf{w}))^\wedge\cdot\overline{\widehat{\mathbf{w}}}\,d\mathbf{k}\\
&= \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{k}|^{2s}(D_j(\nabla\cdot\mathbf{w}))^\wedge\overline{\widehat{w_j}}\,d\mathbf{k}\\
&= \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{k}|^{2s}ik_j\widehat{\nabla\cdot\mathbf{w}}\,\overline{\widehat{w_j}}\,d\mathbf{k}\\
&= -\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{k}|^{2s}\widehat{\nabla\cdot\mathbf{w}}\,\overline{\widehat{D_jw_j}}\,d\mathbf{k}\\
&= -\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{k}|^{2s}\widehat{\nabla\cdot\mathbf{w}}\,\overline{\widehat{\nabla\cdot\mathbf{w}}}\,d\mathbf{k}\\
&= -\|\nabla\cdot\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}^2. \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

Por substituir (3.27), (3.28) e (3.29) em (3.24), concluímos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}^2 = \mathrm{Re}[(\mathbf{w}\otimes\mathbf{u},\nabla\mathbf{w})_{\dot{H}^s} - \gamma\|\nabla\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}^2 - \kappa\|\nabla\cdot\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}^2 + \chi(\nabla\times\mathbf{u},\mathbf{w})_{\dot{H}^s} - 2\chi\|\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}^2],$$

isto é,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}^2+\gamma\|\nabla\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}^2+\kappa\|\nabla\cdot\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}^2+2\chi\|\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}^2 = \mathrm{Re}[(\mathbf{w}\otimes\mathbf{u},\nabla\mathbf{w})_{\dot{H}^s}]+\chi\mathrm{Re}[(\nabla\times\mathbf{u},\mathbf{w})_{\dot{H}^s}]. \quad (3.30)$$

Por fim, apliquemos o mesmo processo para a terceira equação do sistema (1). Realizando o produto interno $(\mathbf{b},\cdot)_{\dot{H}^s}$ na terceira equação do sistema (1), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{b}\|_{\dot{H}^s}^2 &= \frac{1}{2}[(\mathbf{b}_t,\mathbf{b})_{\dot{H}^s}+(\mathbf{b},\mathbf{b}_t)_{\dot{H}^s}]\\
&= \mathrm{Re}[-(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b},\mathbf{b})_{\dot{H}^s}+\nu(\Delta\mathbf{b},\mathbf{b})_{\dot{H}^s}+(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u},\mathbf{b})_{\dot{H}^s}]. \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

Permita-nos examinar algumas das parcelas encontradas no lado direito das igualdades encontradas acima. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u},\mathbf{b})_{\dot{H}^s} &= \sum_{j=1}^{3}(b_jD_j\mathbf{u},\mathbf{b})_{\dot{H}^s}\\
&= \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{k}|^{2s}(b_jD_j\mathbf{u})^\wedge\cdot\overline{\widehat{\mathbf{b}}}\,d\mathbf{k}\\
&= \sum_{l,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{k}|^{2s}(b_jD_ju_l)^\wedge\overline{\widehat{b_l}}\,d\mathbf{k}. \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

É simples notar que, através da condição $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$, chegamos a

$$\begin{aligned}
\sum_{l,j=1}^{3} (b_j D_j u_l)^\wedge \overline{\widehat{b_l}} &= \sum_{l,j=1}^{3} (D_j(b_j u_l))^\wedge \overline{\widehat{b_l}} \\
&= \sum_{l,j=1}^{3} i k_j \widehat{b_j u_l}\, \overline{\widehat{b_l}} \\
&= -\sum_{l,j=1}^{3} \widehat{b_j u_l}\, \overline{\widehat{D_j b_l}} \\
&= -\sum_{l,j=1}^{3} \widehat{b_j \mathbf{u}} \cdot \widehat{D_j \mathbf{b}} \\
&= -\widehat{\mathbf{u} \otimes \mathbf{b}} \cdot \widehat{\nabla \mathbf{b}}. \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

Daí, substituindo (3.33) em (3.32), obtemos

$$(\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{b})_{\dot{H}^s} = -(\mathbf{u} \otimes \mathbf{b}, \nabla \mathbf{b})_{\dot{H}^s}. \qquad (3.34)$$

Por (3.27) e (3.18), temos que

$$-(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{b}, \mathbf{b})_{\dot{H}^s} = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{u}, \nabla \mathbf{b})_{\dot{H}^s} \quad \text{e} \quad (\Delta \mathbf{b}, \mathbf{b})_{\dot{H}^s} = -\|\nabla \mathbf{b}\|_{\dot{H}^s}^2. \qquad (3.35)$$

Por aplicar (3.34) e (3.35) em (3.31), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{b}\|_{\dot{H}^s}^2 + \nu\|\nabla \mathbf{b}\|_{\dot{H}^s}^2 = \mathrm{Re}[(\mathbf{b} \otimes \mathbf{u}, \nabla \mathbf{b})_{\dot{H}^s}] - \mathrm{Re}[(\mathbf{u} \otimes \mathbf{b}, \nabla \mathbf{b})_{\dot{H}^s}]. \qquad (3.36)$$

Somando as igualdades (3.23), (3.30) e (3.36), chegamos a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})\|_{\dot{H}^s}^2 + (\mu + \chi)\|\nabla \mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}^2 + \gamma\|\nabla \mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}^2 + \nu\|\nabla \mathbf{b}\|_{\dot{H}^s}^2 + \kappa\|\nabla \cdot \mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}^2 + 2\chi\|\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}^2 \\
&= \mathrm{Re}[(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u})_{\dot{H}^s}] - \mathrm{Re}[(\mathbf{b} \otimes \mathbf{b}, \nabla \mathbf{u})_{\dot{H}^s}] + \chi\mathrm{Re}[(\nabla \times \mathbf{w}, \mathbf{u})_{\dot{H}^s}] + \mathrm{Re}[(\mathbf{w} \otimes \mathbf{u}, \nabla \mathbf{w})_{\dot{H}^s}] \\
&+ \chi\mathrm{Re}[(\nabla \times \mathbf{u}, \mathbf{w})_{\dot{H}^s}] + \mathrm{Re}[(\mathbf{b} \otimes \mathbf{u}, \nabla \mathbf{b})_{\dot{H}^s}] - \mathrm{Re}[(\mathbf{u} \otimes \mathbf{b}, \nabla \mathbf{b})_{\dot{H}^s}]. \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

Usando o fato que $\widehat{\nabla \times \mathbf{w}} = i\mathbf{k} \times \widehat{\mathbf{w}}$, podemos inferir

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \mathbf{w}, \mathbf{u})_{\dot{H}^s} &= \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{k}|^{2s} \widehat{\nabla \times \mathbf{w}} \cdot \widehat{\mathbf{u}} d\mathbf{k} \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{k}|^{2s} i\mathbf{k} \times \widehat{\mathbf{w}} \cdot \widehat{\mathbf{u}} d\mathbf{k}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{k}|^{2s}\widehat{\mathbf{w}}\cdot i\mathbf{k}\times\widehat{\mathbf{u}}d\mathbf{k}\\
&= \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{k}|^{2s}\widehat{\mathbf{w}}\cdot\widehat{\nabla\times\mathbf{u}}d\mathbf{k}\\
&= (\mathbf{w},\nabla\times\mathbf{u})_{\dot{H}^s}.
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

Logo, substituindo (3.38) em (3.37), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|_{\dot{H}^s}^2+(\mu+\chi)\|\nabla\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}^2+\gamma\|\nabla\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}^2+\nu\|\nabla\mathbf{b}\|_{\dot{H}^s}^2+\kappa\|\nabla\cdot\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}^2+2\chi\|\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}^2\\
&=\mathrm{Re}[(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u},\nabla\mathbf{u})_{\dot{H}^s}]-\mathrm{Re}[(\mathbf{b}\otimes\mathbf{b},\nabla\mathbf{u})_{\dot{H}^s}]+\chi\mathrm{Re}[(\mathbf{w},\nabla\times\mathbf{u})_{\dot{H}^s}]+\mathrm{Re}[(\mathbf{w}\otimes\mathbf{u},\nabla\mathbf{w})_{\dot{H}^s}]\\
&+\chi\mathrm{Re}[(\nabla\times\mathbf{u},\mathbf{w})_{\dot{H}^s}]+\mathrm{Re}[(\mathbf{b}\otimes\mathbf{u},\nabla\mathbf{b})_{\dot{H}^s}]-\mathrm{Re}[(\mathbf{u}\otimes\mathbf{b},\nabla\mathbf{b})_{\dot{H}^s}].
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

Consequentemente, aplicando a Desigualdade de Cauchy-Scharwz, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|_{\dot{H}^s}^2+(\mu+\chi)\|\nabla\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}^2+\gamma\|\nabla\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}^2+\nu\|\nabla\mathbf{b}\|_{\dot{H}^s}^2+\kappa\|\nabla\cdot\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}^2+2\chi\|\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}^2\\
&\leq\|\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}\|\nabla\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}+\|\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}\|_{\dot{H}^s}\|\nabla\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}+\chi\|\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}\|\nabla\times\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}+\|\mathbf{w}\otimes\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}\|\nabla\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}\\
&+\chi\|\nabla\times\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}\|\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}+\|\mathbf{b}\otimes\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}\|\nabla\mathbf{b}\|_{\dot{H}^s}+\|\mathbf{u}\otimes\mathbf{b}\|_{\dot{H}^s}\|\nabla\mathbf{b}\|_{\dot{H}^s}.
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

Agora, vamos provar que

$$
\|\nabla\times\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}=\|\nabla\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}.
\tag{3.41}
$$

De fato, como $\widehat{\nabla\times\mathbf{u}}=i\mathbf{k}\times\widehat{\mathbf{u}}$, $|\widehat{\nabla\mathbf{u}}|^2=|\mathbf{k}|^2|\widehat{\mathbf{u}}|^2$ e $\mathbf{k}\cdot\widehat{\mathbf{u}}=0\,(\nabla\cdot\mathbf{u}=0)$, segue que

$$
\begin{aligned}
\|\nabla\times\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{k}|^{2s}|\widehat{\nabla\times\mathbf{u}}|^2d\mathbf{k} = \int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{k}|^{2s}|i\mathbf{k}\times\widehat{\mathbf{u}}|^2d\mathbf{k}\\
&= \int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{k}|^{2s}|\mathbf{k}|^2|\widehat{\mathbf{u}}|^2d\mathbf{k} = \int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{k}|^{2s}|\widehat{\nabla\mathbf{u}}|^2d\mathbf{k}\\
&= \|\nabla\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}^2.
\end{aligned}
$$

Aplicando (3.41) em (3.40), concluímos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|_{\dot{H}^s}^2+(\mu+\chi)\|\nabla\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}^2+\gamma\|\nabla\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}^2+\nu\|\nabla\mathbf{b}\|_{\dot{H}^s}^2+\kappa\|\nabla\cdot\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}^2+2\chi\|\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}^2\\
&\leq\|\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}\|\nabla\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}+\|\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}\|_{\dot{H}^s}\|\nabla\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}+\chi\|\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}\|\nabla\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}+\|\mathbf{w}\otimes\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}\|\nabla\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}\\
&+\chi\|\nabla\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}\|\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}+\|\mathbf{b}\otimes\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}\|\nabla\mathbf{b}\|_{\dot{H}^s}+\|\mathbf{u}\otimes\mathbf{b}\|_{\dot{H}^s}\|\nabla\mathbf{b}\|_{\dot{H}^s}.
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

Pela Desigualdade de Young, chegamos a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|^2_{\dot{H}^s}+\mu\|\nabla\mathbf{u}\|^2_{\dot{H}^s}+\gamma\|\nabla\mathbf{w}\|^2_{\dot{H}^s}+\nu\|\nabla\mathbf{b}\|^2_{\dot{H}^s}+\kappa\|\nabla\cdot\mathbf{w}\|^2_{\dot{H}^s}+\chi\|\mathbf{w}\|^2_{\dot{H}^s}\\
&\leq\ \|\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}\|\nabla\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}+\|\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}\|_{\dot{H}^s}\|\nabla\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}+\|\mathbf{w}\otimes\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}\|\nabla\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}+\|\mathbf{b}\otimes\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}\|\nabla\mathbf{b}\|_{\dot{H}^s}\\
&+\|\mathbf{u}\otimes\mathbf{b}\|_{\dot{H}^s}\|\nabla\mathbf{b}\|_{\dot{H}^s}.
\end{aligned}\tag{3.43}$$

Utilizando a desigualdade (1.40), encontramos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|^2_{\dot{H}^s}+\mu\|\nabla\mathbf{u}\|^2_{\dot{H}^s}+\gamma\|\nabla\mathbf{w}\|^2_{\dot{H}^s}+\nu\|\nabla\mathbf{b}\|^2_{\dot{H}^s}+k\|\nabla\cdot\mathbf{w}\|^2_{\dot{H}^s}+\chi\|\mathbf{w}\|^2_{\dot{H}^s}\\
&\leq\ C_{s,\delta}[\|\mathbf{u}\|_{\dot{H}^\eta}\|\mathbf{u}\|_{\dot{H}^{\eta'}}\|\nabla\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}+\|\mathbf{b}\|_{\dot{H}^\eta}\|\mathbf{b}\|_{\dot{H}^{\eta'}}\|\nabla\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}+\|\mathbf{w}\|_{\dot{H}^\eta}\|\mathbf{u}\|_{\dot{H}^{\eta'}}\|\nabla\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}\\
&+\|\mathbf{u}\|_{\dot{H}^\eta}\|\mathbf{w}\|_{\dot{H}^{\eta'}}\|\nabla\mathbf{w}\|_{\dot{H}^s}+\|\mathbf{b}\|_{\dot{H}^\eta}\|\mathbf{u}\|_{\dot{H}^{\eta'}}\|\nabla\mathbf{b}\|_{\dot{H}^s}+\|\mathbf{u}\|_{\dot{H}^\eta}\|\mathbf{b}\|_{\dot{H}^{\eta'}}\|\nabla\mathbf{b}\|_{\dot{H}^s}],
\end{aligned}\tag{3.44}$$

onde $\eta:=\frac{1}{2}+\delta$ e $\eta':=s+1-\delta$. Aplicando agora o Lema 4.5 (ver Apêndice), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|^2_{\dot{H}^s}+\mu\|\nabla\mathbf{u}\|^2_{\dot{H}^s}+\gamma\|\nabla\mathbf{w}\|^2_{\dot{H}^s}+\nu\|\nabla\mathbf{b}\|^2_{\dot{H}^s}+\kappa\|\nabla\cdot\mathbf{w}\|^2_{\dot{H}^s}+\chi\|\mathbf{w}\|^2_{\dot{H}^s}\\
&\leq\ C_{s,\delta}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|_{\dot{H}^\eta}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|_{\dot{H}^{\eta'}}\|(\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{w},\nabla\mathbf{b}\|_{\dot{H}^s}\\
&\leq\ C_{s,\delta}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|^\delta_{\dot{H}^s}\|(\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{w},\nabla\mathbf{b})\|^{2-\delta}_{\dot{H}^s}.
\end{aligned}\tag{3.45}$$

Seja $\alpha=\min\{\mu,\gamma,\nu\}$. Logo,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|^2_{\dot{H}^s}+2\alpha\|(\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{w},\nabla\mathbf{b}\|^2_{\dot{H}^s}+2\kappa\|\nabla\cdot\mathbf{w}\|^2_{\dot{H}^s}+2\chi\|\mathbf{w}\|^2_{\dot{H}^s}\\
&\leq\ C_{s,\delta}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|^\delta_{\dot{H}^s}\|(\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{w},\nabla\mathbf{b})\|^{2-\delta}_{\dot{H}^s}.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Young, chegamos a

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|^2_{\dot{H}^s}+\alpha\|(\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{w},\nabla\mathbf{b}\|^2_{\dot{H}^s}+2\kappa\|\nabla\cdot\mathbf{w}\|^2_{\dot{H}^s}+2\chi\|\mathbf{w}\|^2_{\dot{H}^s}\\
&\leq\ C_{s,\delta,\mu,\nu,\gamma}\,\alpha^{-\frac{2-\delta}{\delta}}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|^{\frac{2}{\delta}}_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|^2_{\dot{H}^s}.
\end{aligned}$$

Em particular,

$$\frac{d}{dt}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|^2_{\dot{H}^s}\leq C_{s,\delta,\mu,\nu,\gamma}\,\alpha^{-\frac{2-\delta}{\delta}}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|^{\frac{2}{\delta}}_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|^2_{\dot{H}^s}.\tag{3.46}$$

Deste modo, pelo Lema de Gronwall, com $0\leq a\leq t<T^*$, conclui-se

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|^2_{\dot{H}^s}\leq\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,a)\|^2_{\dot{H}^s}\exp\Big(C_{s,\delta,\mu,\nu,\gamma}\,\alpha^{-\frac{2-\delta}{\delta}}\int_a^t\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,\tau)\|^{\frac{2}{\delta}}_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}}\,d\tau\Big).\tag{3.47}$$

Notemos, em particular, que para $s = s_0 (> \frac{3}{2} > \frac{1}{2} + \delta)$, temos

$$\int_a^{T^*} \|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, \tau)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}}^{\frac{2}{\delta}} d\tau = \infty, \tag{3.48}$$

desde que $\limsup_{t \nearrow T^*} \|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_{\dot{H}^{s_0}} = \infty$, ver (3). Também temos, pelo Lema 4.4 (ver Apêndice), que

$$\|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}}^{\frac{2}{\delta}} \leq \|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_2^{\frac{2(1-\theta)}{\delta}} \|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_{\dot{H}^s}^{\frac{2\theta}{\delta}}, \quad \forall\, t \in [0, T^*),$$

onde $\theta := \frac{1+2\delta}{2s}$. Logo, por (3.47), infere-se

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}}^{\frac{2}{\delta}} \;&\leq\; \|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_2^{\frac{2(1-\theta)}{\delta}} \|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, a)\|_{\dot{H}^s}^{\frac{2\theta}{\delta}} \\ &\quad \times \exp\Big(C_{s,\delta,\mu,\nu,\gamma}\, \alpha^{-\frac{2-\delta}{\delta}} \int_a^t \|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, \tau)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}}^{\frac{2}{\delta}}\, d\tau \Big). \end{aligned}$$

Usando o Lema 3.1, podemos concluir que

$$\begin{aligned} &\|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}}^{\frac{2}{\delta}} \exp\Big(- C_{s,\delta,\mu,\nu,\gamma}\, \alpha^{-\frac{2-\delta}{\delta}} \int_a^t \|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, \tau)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}}^{\frac{2}{\delta}}\, d\tau \Big) \\ &\leq\; \|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, a)\|_2^{\frac{2(1-\theta)}{\delta}} \|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, a)\|_{\dot{H}^s}^{\frac{2\theta}{\delta}}. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Integrando (3.49) em $[a, T]$ com $T < T^*$, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_a^T \|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}}^{\frac{2}{\delta}} \exp\Big(- C_{s,\delta,\mu,\nu,\gamma}\, \alpha^{-\frac{2-\delta}{\delta}} \int_a^t \|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, \tau)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}}^{\frac{2}{\delta}}\, d\tau \Big)\, dt \\ &\leq\; \|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, a)\|_2^{\frac{2(1-\theta)}{\delta}} \|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, a)\|_{\dot{H}^s}^{\frac{2\theta}{\delta}} (T - a). \end{aligned} \tag{3.50}$$

Observemos que,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \exp\Big(- C_{s,\delta,\mu,\nu,\gamma}\, \alpha^{-\frac{2-\delta}{\delta}} \int_a^t \|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, \tau)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}}^{\frac{2}{\delta}}\, d\tau \Big) \\ &= \; -C_{s,\delta,\mu,\nu,\gamma}\, \alpha^{-\frac{2-\delta}{\delta}} \|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}}^{\frac{2}{\delta}} \exp\Big(- C_{s,\delta,\mu,\nu,\gamma}\, \alpha^{-\frac{2-\delta}{\delta}} \int_a^t \|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, \tau)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}}^{\frac{2}{\delta}}\, d\tau \Big). \end{aligned}$$

Reescrevendo (3.50) através do Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{-\alpha^{\frac{2-\delta}{\delta}}}{C_{s,\delta,\mu,\nu,\gamma}} \exp\Big(- C_{s,\delta,\mu,\nu,\gamma}\, \alpha^{-\frac{2-\delta}{\delta}} \int_a^t \|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, \tau)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}}^{\frac{2}{\delta}}\, d\tau \Big)\Big|_{t=a}^{t=T} \\ &\leq\; \|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, a)\|_2^{\frac{2(1-\theta)}{\delta}} \|(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b})(\cdot, a)\|_{\dot{H}^s}^{\frac{2\theta}{\delta}} (T - a), \end{aligned}$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
&1-\exp\Big(-C_{s,\delta,\mu,\nu,\gamma}\,\alpha^{-\frac{2-\delta}{\delta}}\int_a^T\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,\tau)\|_{\dot H^{\frac12+\delta}}^{\frac{2}{\delta}}\,d\tau\Big)\\
&\leq C_{s,\delta,\mu,\nu,\gamma}\,\alpha^{-\frac{2-\delta}{\delta}}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,a)\|_2^{\frac{2(1-\theta)}{\delta}}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,a)\|_{\dot H^s}^{\frac{2\theta}{\delta}}(T-a).
\end{aligned}
$$

Passando ao limite, quando $T\to T^*$, e usando (3.48), concluímos que

$$
1\leq C_{s,\delta,\mu,\nu,\gamma}\,\alpha^{-\frac{2-\delta}{\delta}}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,a)\|_2^{\frac{2(1-\theta)}{\delta}}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,a)\|_{\dot H^s}^{\frac{2\theta}{\delta}}(T^*-a).
$$

Portanto,

$$
\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,a)\|_{\dot H^s}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,a)\|_2^{\frac{1-\theta}{\theta}}\geq\frac{C_{s,\delta,\mu,\nu,\gamma}\,\alpha^{\frac{2-\delta}{2\theta}}}{(T^*-a)^{\frac{\delta}{2\theta}}}.
$$

Por fim, como $\theta:=\frac{1+2\delta}{2s}$, temos

$$
\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_{\dot H^s}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2^{p(s,\delta)}\geq\frac{C_{s,\delta,\mu,\nu,\gamma}\,\alpha^{q(s,\delta)}}{(T^*-t)^{r(s,\delta)}},
$$

onde $p(s,\delta)=\frac{2s}{1+\delta}-1$, $q(s,\delta)=\frac{s(2-\delta)}{1+2\delta}$ e $r(s,\delta)=\frac{s\delta}{1+2\delta}$. Isto completa a prova do Teorema 3.1. □

Segue diretamente do Teorema 3.1 que se $(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)$ é a solução de (1) definida no intervalo de tempo $[0,T^*)$, com $T^*<\infty$, então

$$
\sup_{t\in[0,T^*)}\Big\{\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_{\dot H^s}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2^{\frac{2s}{1+2\delta}-1}\Big\}=\infty,
$$

para $\delta\in(0,1)$ e $s\geq\frac12+\delta$. Isto é equivalente a dizer que se o supremo acima fosse finito, então a solução seria global no tempo.

Abaixo listamos algumas consequências imediatas do Teorema 3.1. Uma destas implicações é a Desigualdade de Leray para o sistema magneto-micropolar (1) (esta mesma desigualdade foi provada, neste trabalho, no Teorema 2.4 para as equações MHD).

A primeira destas consequências nos informa que

$$
\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_{\dot H^s}\geq C\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{w}_0,\mathbf{b}_0)\|_2^{1-s}(T^*-t)^{-\frac{s}{4}},\quad\forall\,t\in[0,T^*),
$$

se $(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)$ é a solução do sistema (1) em $[0,T^*)$ $(T^*<\infty)$ e $s\geq1$ (ver Lema 3.1). Mais precisamente, temos o seguinte corolário.

Corolário 3.2. *Seja* $(\mathbf{u}_0,\mathbf{w}_0,\mathbf{b}_0)\in H^{s_0}(\mathbb{R}^3)$, *com* $s_0>\frac32$, *tal que* $\nabla\cdot\mathbf{u}_0=\nabla\cdot\mathbf{b}_0=0$. *Seja*

$(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t) \in C([0,T^*),H^s(\mathbb{R}^3))$ a solução forte do sistema (1) definida no intervalo maximal $[0,T^*)$. Se $T^* < \infty$, então, para cada $s \geq 1$, tem-se

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_{\dot{H}^s}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2^{s-1} \geq C_{s,\mu,\nu,\gamma}\,\alpha^{\frac{3s}{4}}(T^*-t)^{-\frac{s}{4}}, \quad \forall\, t \in [0,T^*), \tag{3.51}$$

onde $\alpha = \min\{\mu,\nu,\gamma\}$ e $C_{s,\mu,\nu,\gamma}$ é uma constante positiva que depende somente de s,μ,ν e γ.

Demonstração. Considere $\delta = \frac{1}{2}(s \geq 1)$ no Teorema 3.1. Assim, temos $p(s,\delta) = s-1$, $q(s,\delta) = \frac{3s}{4}$ e $r(s,\delta) = \frac{s}{4}$. Consequentemente, pelo Teorema 3.1, encontramos

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_{\dot{H}^s}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2^{s-1} \geq C_{s,\mu,\nu,\gamma}\,\alpha^{\frac{3s}{4}}(T^*-t)^{-\frac{s}{4}}, \quad \forall\, t \in [0,T^*).$$

Isto completa a prova do resultado. $\square$

O Corolário abaixo estabelece que é possível estender a Desigualdade de Leray, encontrada em [28], relacionada às equações de Navier-Stokes (5), para o sistema magneto-micropolar (1).

Corolário 3.3 (Desigualdade de Leray)**.** *Seja $(\mathbf{u}_0,\mathbf{w}_0,\mathbf{b}_0) \in H^{s_0}(\mathbb{R}^3)$, com $s_0 > \frac{3}{2}$, tal que $\nabla\cdot\mathbf{u}_0 = \nabla\cdot\mathbf{b}_0 = 0$. Seja $(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t) \in C([0,T^*),H^s(\mathbb{R}^3))$ a solução forte do sistema (1) definida no intervalo maximal $[0,T^*)$. Se $T^* < \infty$, então*

$$\|(D\mathbf{u},D\mathbf{w},D\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2 \geq C\alpha^{\frac{3}{4}}(T^*-t)^{-\frac{1}{4}}, \quad \forall\, t \in [0,T^*),$$

onde $\alpha = \min\{\mu,\nu,\gamma\}$ e C é uma constante positiva absoluta.

Demonstração. A prova deste resultado segue diretamente por assumir $s = 1$ no Corolário 3.2, já que

$$\begin{aligned}
\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|_{\dot{H}^1}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{k}|^2|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})|^2\,d\mathbf{k}\\
&= \int_{\mathbb{R}^3} |(\widehat{D\mathbf{u}},\widehat{D\mathbf{w}},\widehat{D\mathbf{b}})|^2\,d\mathbf{k}\\
&= \|(D\mathbf{u},D\mathbf{w},D\mathbf{b})\|_2^2.
\end{aligned}$$

$\square$

Considere novamente que $(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)$ é a solução de (1) definida no intervalo de tempo $[0,T^*)$, com $T^* < \infty$. O corolário abaixo nos mostra como é possível encontrar um limite inferior envolvendo somente Espaços de Sobolev Homogêneos; mais especificamente, $\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_{\dot{H}^s}$ é maior ou igual a $C(T^*-t)^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}}$, se $t\in[0,T^*)$ e $\frac{1}{2}<s<\frac{3}{2}$.

Corolário 3.4. *Seja* $(\mathbf{u}_0,\mathbf{w}_0,\mathbf{b}_0)\in H^{s_0}(\mathbb{R}^3)$*, com* $s_0>\frac{3}{2}$*, tal que* $\nabla\cdot\mathbf{u}_0=\nabla\cdot\mathbf{b}_0=0$*. Seja* $(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\in C([0,T^*),H^s(\mathbb{R}^3))$ *a solução forte do sistema* (1) *definida no intervalo maximal* $[0,T^*)$*. Se* $T^*<\infty$*, então, para cada* $\frac{1}{2}<s<\frac{3}{2}$*, tem-se*

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)}\geq C_{s,\mu,\nu,\gamma}\,\alpha^{\frac{5}{4}-\frac{s}{2}}(T^*-t)^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}},\quad\forall\,t\in[0,T^*),$$

onde $\alpha=\min\{\mu,\nu,\gamma\}$ *e* $C_{s,\mu,\nu,\gamma}$ *é uma constante positiva que depende somente de* s,μ,ν *e* γ*.*

Demonstração. Considere $\delta=s-\frac{1}{2}$ no Teorema 3.1 em ordem a encontrar $p(s,\delta)=0$, $q(s,\delta)=\frac{5}{4}-\frac{s}{2}$ e $r(s,\delta)=\frac{s}{2}-\frac{1}{4}$. O resultado segue da substituição de $p(s,\delta)$, $q(s,\delta)$ e $r(s,\delta)$ no Teorema 3.1. $\square$

3.2 Limite Inferior para $\|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})(\cdot,t)\|_1$

Neste seção, provaremos que se $(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)$ é a solução de (1) no intervalo maximal de tempo $[0,T^*)$, então o seguinte limite de explosão é verdadeiro:

$$\lim_{t\nearrow T^*}\|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})(\cdot,t)\|_1=\infty,$$

se $T^*<\infty$. Mais geralmente, o resultado abaixo vale.

Teorema 3.5. *Fixe* $s_0>\frac{3}{2}$ *e seja* $(\mathbf{u}_0,\mathbf{w}_0,\mathbf{b}_0)\in H^{s_0}(\mathbb{R}^3)$ *tal que* $\nabla\cdot\mathbf{u}_0=\nabla\cdot\mathbf{b}_0=0$*. Considere que* $(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\in C([0,T^*),H^s(\mathbb{R}^3))$ *é a solução forte de* (1)*, definida no intervalo maximal* $[0,T^*)$*. Assuma que* $T^*<\infty$*. Então,*

$$\|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})(\cdot,t)\|_1\geq\frac{2\sqrt{2}\alpha^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{3}{2}}}{5\sqrt{3}}(T^*-t)^{-\frac{1}{2}},\quad\forall\,t\in[0,T^*),\tag{3.52}$$

onde $\alpha=\min\{\mu,\nu,\gamma\}$*.*

Demonstração. Seja $q=p+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2$. Aplicando a transformada de Fourier na primeira equação do sistema (1), obtemos

$$\widehat{\mathbf{u}}_t+(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})^\wedge+\widehat{\nabla q}=(\mu+\chi)\widehat{\Delta\mathbf{u}}+(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})^\wedge+\chi\widehat{\nabla\times\mathbf{w}}.$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\partial_t|\widehat{\mathbf{u}}|^2 &= \frac{1}{2}[\widehat{\mathbf{u}}_t\cdot\widehat{\mathbf{u}}+\widehat{\mathbf{u}}\cdot\widehat{\mathbf{u}}_t] \\
&= \mathrm{Re}[-(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})^\wedge\cdot\widehat{\mathbf{u}}-\widehat{\nabla q}\cdot\widehat{\mathbf{u}}+(\mu+\chi)\widehat{\Delta\mathbf{u}}\cdot\widehat{\mathbf{u}}+(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})^\wedge\cdot\widehat{\mathbf{u}} \\
&\quad +\chi\widehat{\nabla\times\mathbf{w}}\cdot\widehat{\mathbf{u}}]. \qquad (3.53)
\end{aligned}
$$

É fácil ver que

$$
\widehat{\Delta\mathbf{u}}\cdot\widehat{\mathbf{u}}=-|\mathbf{k}|^2|\widehat{\mathbf{u}}|^2=-|\widehat{\nabla\mathbf{u}}|^2. \qquad (3.54)
$$

Notemos que,

$$
\begin{aligned}
-\widehat{\nabla q}\cdot\widehat{\mathbf{u}} &= -\sum_{j=1}^{3}\widehat{D_j q}\,\overline{\widehat{u}_j}=-\sum_{j=1}^{3}ik_j\widehat{q}\,\overline{\widehat{u}_j} \\
&= \sum_{j=1}^{3}\widehat{q}\,\overline{\widehat{D_j u_j}} \\
&= 0, \qquad (3.55)
\end{aligned}
$$

pois $\mathbf{u}$ é livre de divergente. Além disso,

$$
\widehat{\nabla\times\mathbf{w}}\cdot\widehat{\mathbf{u}}=i\mathbf{k}\times\widehat{\mathbf{w}}=\widehat{\mathbf{w}}\cdot i\mathbf{k}\times\widehat{\mathbf{u}}=\widehat{\mathbf{w}}\cdot\widehat{\nabla\times\mathbf{u}}. \qquad (3.56)
$$

Por aplicar (3.54), (3.55) e (3.56) em (3.53), obtemos

$$
\frac{1}{2}\partial_t|\widehat{\mathbf{u}}|^2=\mathrm{Re}[-(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})^\wedge\cdot\widehat{\mathbf{u}}-(\mu+\chi)|\widehat{\nabla\mathbf{u}}|^2+(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})^\wedge\cdot\widehat{\mathbf{u}}+\chi\widehat{\mathbf{w}}\cdot\widehat{\nabla\times\mathbf{u}}]. \qquad (3.57)
$$

Agora, realizaremos o mesmo processo para a segunda equação do sistema (1). Aplicando a transformada de Fourier na segunda equação do sistema (1), obtemos

$$
\widehat{\mathbf{w}}_t+(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{w})^\wedge=\gamma\widehat{\Delta\mathbf{w}}+\kappa[\nabla(\nabla\cdot\mathbf{w})]^\wedge+\chi\widehat{\nabla\times\mathbf{u}}-2\chi\widehat{\mathbf{w}}. \qquad (3.58)
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\partial_t|\widehat{\mathbf{w}}|^2 &= \frac{1}{2}[\widehat{\mathbf{w}}_t\cdot\widehat{\mathbf{w}}+\widehat{\mathbf{w}}\cdot\widehat{\mathbf{w}}_t] \\
&= \mathrm{Re}[-(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{w})^\wedge\cdot\widehat{\mathbf{w}}+\gamma\widehat{\Delta\mathbf{w}}\cdot\widehat{\mathbf{w}}+\kappa[\nabla(\nabla\cdot\mathbf{w})]^\wedge\cdot\widehat{\mathbf{w}}+\chi\widehat{\nabla\times\mathbf{u}}\cdot\widehat{\mathbf{w}} \\
&\quad -2\chi\widehat{\mathbf{w}}\cdot\widehat{\mathbf{w}}]. \qquad (3.59)
\end{aligned}
$$

Sabemos que,

$$
\widehat{\Delta\mathbf{w}}\cdot\widehat{\mathbf{w}}=-|\widehat{\nabla\mathbf{w}}|. \qquad (3.60)
$$

Notemos que,

$$\begin{aligned}
[\nabla(\nabla\cdot\mathbf{w})]^{\wedge}\cdot\widehat{\mathbf{w}} &= \sum_{j=1}^{3}[D_j(\nabla\cdot\mathbf{w})]^{\wedge}\,\overline{\widehat{w_j}}\\
&= -\sum_{j=1}^{3}\widehat{\nabla\cdot\mathbf{w}}\,\overline{\widehat{D_j w_j}}\\
&= -\widehat{\nabla\cdot\mathbf{w}}\,\overline{\widehat{\nabla\cdot\mathbf{w}}}\\
&= -|\widehat{\nabla\cdot\mathbf{w}}|^2. \qquad (3.61)
\end{aligned}$$

Assim, aplicando (3.60) e (3.61) em (3.59), obtemos

$$\frac{1}{2}\partial_t|\widehat{\mathbf{w}}|^2 = \mathrm{Re}[-(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{w})^{\wedge}\cdot\widehat{\mathbf{w}} - \gamma|\widehat{\nabla\mathbf{w}}| - \kappa|\widehat{\nabla\cdot\mathbf{w}}|^2 + \chi\widehat{\nabla\times\mathbf{u}}\cdot\widehat{\mathbf{w}} - 2\chi|\widehat{\mathbf{w}}|^2]. \qquad (3.62)$$

Por fim, aplicando a transformada de Fourier na terceira equação do sistema (1), temos

$$\widehat{\mathbf{b}}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b})^{\wedge} = \nu\widehat{\Delta\mathbf{b}} + (\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u})^{\wedge}. \qquad (3.63)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\partial_t|\widehat{\mathbf{b}}|^2 &= \frac{1}{2}[\widehat{\mathbf{b}}_t\cdot\widehat{\mathbf{b}} + \widehat{\mathbf{b}}\cdot\widehat{\mathbf{b}}_t]\\
&= \mathrm{Re}[-(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b})^{\wedge}\cdot\widehat{\mathbf{b}} + \nu\widehat{\Delta\mathbf{b}}\cdot\widehat{\mathbf{b}} + (\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u})^{\wedge}\cdot\widehat{\mathbf{b}}]\\
&= \mathrm{Re}[-(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b})^{\wedge}\cdot\widehat{\mathbf{b}} - \nu|\widehat{\nabla\mathbf{b}}|^2 + (\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u})^{\wedge}\cdot\widehat{\mathbf{b}}]. \qquad (3.64)
\end{aligned}$$

Somando (3.57), (3.62) e (3.64), encontramos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\partial_t|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})|^2 + (\mu+\chi)|\widehat{\nabla\mathbf{u}}|^2 + \gamma|\widehat{\nabla\mathbf{w}}|^2 + \nu|\widehat{\nabla\mathbf{b}}|^2 + \kappa|\widehat{\nabla\cdot\mathbf{w}}|^2 + 2\chi|\widehat{\mathbf{w}}|^2\\
&= -\mathrm{Re}[(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})^{\wedge}\cdot\widehat{\mathbf{u}}] + \mathrm{Re}[(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})^{\wedge}\cdot\widehat{\mathbf{u}}] - \mathrm{Re}[(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{w})^{\wedge}\cdot\widehat{\mathbf{w}}] + \chi\mathrm{Re}[\widehat{\mathbf{w}}\cdot\widehat{\nabla\times\mathbf{u}}]\\
&- \mathrm{Re}[(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b})^{\wedge}\cdot\widehat{\mathbf{b}}] + \mathrm{Re}[(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u})^{\wedge}\cdot\widehat{\mathbf{b}}] + \chi\mathrm{Re}[\widehat{\nabla\times\mathbf{u}}\cdot\widehat{\mathbf{w}}]. \qquad (3.65)
\end{aligned}$$

Sabemos, pelas Desigualdades de Cauchy-Scharwz e Hölder, que

$$|\widehat{\nabla\times\mathbf{u}}\cdot\widehat{\mathbf{w}}| \leq |\widehat{\nabla\times\mathbf{u}}||\widehat{\mathbf{w}}| = |\mathbf{k}\times\widehat{\mathbf{u}}||\widehat{\mathbf{w}}| = |\widehat{\nabla\mathbf{u}}||\widehat{\mathbf{w}}| \leq \frac{1}{2}|\widehat{\nabla\mathbf{u}}|^2 + \frac{1}{2}|\widehat{\mathbf{w}}|^2, \qquad (3.66)$$

pois $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$. Substituindo a estimativa (3.66) em (3.65), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\partial_t|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})|^2 + \mu|\widehat{\nabla\mathbf{u}}|^2 + \gamma|\widehat{\nabla\mathbf{w}}|^2 + \nu|\widehat{\nabla\mathbf{b}}|^2 + \kappa|\widehat{\nabla\cdot\mathbf{w}}|^2 + \chi|\widehat{\mathbf{w}}|^2\\
&\leq |(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})^{\wedge}||\widehat{\mathbf{u}}| + |(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})^{\wedge}||\widehat{\mathbf{u}}| + |(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{w})^{\wedge}||\widehat{\mathbf{w}}| + |(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b})^{\wedge}||\widehat{\mathbf{b}}| + |(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u})^{\wedge}||\widehat{\mathbf{b}}|. \qquad (3.67)
\end{aligned}$$

Para $\epsilon > 0$ fixado, temos que

$$\frac{1}{2}\partial_t|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})|^2 = \sqrt{|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})|^2+\epsilon}\;\partial_t\Big(\sqrt{|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})|^2+\epsilon}\Big). \tag{3.68}$$

Aplicando a igualdade (3.68) em (3.67), obtemos

$$\begin{aligned}
&\partial_t\Big(\sqrt{|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})|^2+\epsilon}\Big)+\frac{\alpha|(\widehat{\nabla\mathbf{u}},\widehat{\nabla\mathbf{w}},\widehat{\nabla\mathbf{b}})|^2}{\sqrt{|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})|^2+\epsilon}}\\
&\leq \frac{[|(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})^\wedge|+|(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})^\wedge|+|(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{w})^\wedge|+|(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b})^\wedge|+|(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u})^\wedge|]\,|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})|}{\sqrt{|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})|^2+\epsilon}}\\
&\leq |(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})^\wedge|+|(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})^\wedge|+|(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{w})^\wedge|+|(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b})^\wedge|+|(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u})^\wedge|,
\end{aligned} \tag{3.69}$$

onde $\alpha = \min\{\mu,\nu,\gamma\}$. Fazendo $\epsilon \to 0$, encontramos

$$\begin{aligned}
\partial_t|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})|+\frac{\alpha|(\widehat{\nabla\mathbf{u}},\widehat{\nabla\mathbf{w}},\widehat{\nabla\mathbf{b}})|^2}{|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})|} \;&\leq\; |(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})^\wedge|+|(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})^\wedge|+|(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{w})^\wedge|\\
&\quad+|\widehat{(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{b}}|+|\widehat{(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{u}}|.
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Observemos que,

$$\begin{aligned}
\frac{|(\widehat{\nabla\mathbf{u}},\widehat{\nabla\mathbf{w}},\widehat{\nabla\mathbf{b}})|^2}{|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})|} &= \frac{|\mathbf{k}|^2|\widehat{\mathbf{u}}|^2+|\mathbf{k}|^2|\widehat{\mathbf{w}}|^2+|\mathbf{k}|^2|\widehat{\mathbf{b}}|^2}{|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})|}\\
&= |\mathbf{k}|^2|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})|\\
&= |(\widehat{\Delta\mathbf{u}},\widehat{\Delta\mathbf{w}},\widehat{\Delta\mathbf{b}})|.
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Substituindo (3.71) em (3.70), concluímos que,

$$\begin{aligned}
\partial_t|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})|+\alpha|(\widehat{\Delta\mathbf{u}},\widehat{\Delta\mathbf{w}},\widehat{\Delta\mathbf{b}})| \;&\leq\; |(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})^\wedge|+|(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})^\wedge|+|(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{w})^\wedge|\\
&\quad+|(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b})^\wedge|+|(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u})^\wedge|.
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Agora, integrando (3.72) sobre $\mathbb{R}^3$, concluímos que,

$$\begin{aligned}
&\partial_t\|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})\|_1+\alpha\|(\widehat{\Delta\mathbf{u}},\widehat{\Delta\mathbf{w}},\widehat{\Delta\mathbf{b}})\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}^3}|(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})^\wedge|\,d\mathbf{k}+\int_{\mathbb{R}^3}|(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})^\wedge|\,d\mathbf{k}\\
&+\int_{\mathbb{R}^3}|(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{w})^\wedge|\,d\mathbf{k}+\int_{\mathbb{R}^3}|(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b})^\wedge|\,d\mathbf{k}+\int_{\mathbb{R}^3}|(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u})^\wedge|\,d\mathbf{k}.
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} |(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})^\wedge|\,d\mathbf{k} &= \int_{\mathbb{R}^3} \Big|\sum_{j=1}^{3} \widehat{u_j D_j \mathbf{u}}\Big|\,d\mathbf{k}\\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \Big(\sum_{l=1}^{3}\Big|\sum_{j=1}^{3} \widehat{u_j D_j u_l}\Big|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\,d\mathbf{k}\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{l=1}^{3}\Big|\sum_{j=1}^{3} \widehat{u_j D_j u_l}\Big|\,d\mathbf{k}\\
&\leq \sum_{l,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{u_j D_j u_l}|\,d\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Usando a igualdade

$$\widehat{f} * \widehat{g} = (2\pi)^{\frac{3}{2}}\widehat{fg}, \tag{3.74}$$

chegamos a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} |(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})^\wedge|\,d\mathbf{k} &\leq (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\sum_{l,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{u}_j * \widehat{D_j u_l}|\,d\mathbf{k}\\
&= (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\sum_{l,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} \Big|\int_{\mathbb{R}^3} \widehat{u}_j(\mathbf{k}-\boldsymbol{\eta})\widehat{D_j u_l}(\boldsymbol{\eta})\,d\boldsymbol{\eta}\Big|\,d\mathbf{k}\\
&\leq (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\sum_{l,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{u}_j(\mathbf{k}-\boldsymbol{\eta})||\widehat{D_j u_l}(\boldsymbol{\eta})|\,d\boldsymbol{\eta}\,d\mathbf{k}\\
&= (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\sum_{l,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{u}_j| * |\widehat{D_j u_l}|\,d\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Utilizando a Desigualdade de Young para convoluções, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} |(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})^\wedge|\,d\mathbf{k} &\leq (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\sum_{l,j=1}^{3}\|\widehat{u}_j\|_1\|\widehat{D_j u_l}\|_1\\
&\leq (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\|\widehat{\mathbf{u}}\|_1\sum_{l,j=1}^{3}\|\widehat{D_j u_l}\|_1\\
&= (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\|\widehat{\mathbf{u}}\|_1\sum_{l,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|\widehat{D_j u_l}|\,d\mathbf{k}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\|\widehat{\mathbf{u}}\|_1 \sum_{l,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |ik_j \widehat{u}_l| \, d\mathbf{k} \\
&= (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\|\widehat{\mathbf{u}}\|_1 \sum_{l,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |k_j||\widehat{u}_l| \, d\mathbf{k} \\
&= (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\|\widehat{\mathbf{u}}\|_1 \sum_{l,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |k_j||\widehat{u}_l|^{\frac{1}{2}}|\widehat{u}_l|^{\frac{1}{2}} \, d\mathbf{k}.
\end{aligned}
$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, encontramos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} |(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})^\wedge| \, d\mathbf{k} &\leq (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\|\widehat{\mathbf{u}}\|_1 \sum_{l,j=1}^{3} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |k_j|^2|\widehat{u}_l| \, d\mathbf{k}\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{u}_l| \, d\mathbf{k}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\|\widehat{\mathbf{u}}\|_1 \Big(\sum_{l,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |k_j|^2|\widehat{u}_l| \, d\mathbf{k}\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{l,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{u}_l| \, d\mathbf{k}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{3}(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\|\widehat{\mathbf{u}}\|_1 \Big(\sum_{l=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{k}|^2|\widehat{u}_l| \, d\mathbf{k}\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{l=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{u}_l| \, d\mathbf{k}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{3}(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\|\widehat{\mathbf{u}}\|_1 \Big(\sum_{l=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{\Delta u_l}| \, d\mathbf{k}\Big)^{\frac{1}{2}} \|\widehat{\mathbf{u}}\|_1^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{3}(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\|\widehat{\mathbf{u}}\|_1^{\frac{3}{2}} \|\widehat{\Delta\mathbf{u}}\|_1^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{3}(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})\|_1^{\frac{3}{2}} \|(\widehat{\Delta\mathbf{u}},\widehat{\Delta\mathbf{w}},\widehat{\Delta\mathbf{b}})\|_1^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.75)
\end{aligned}
$$

Repetindo o mesmo processo, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} |(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b})^\wedge| \, d\mathbf{k} &\leq \sqrt{3}(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\|\widehat{\mathbf{b}}\|_1^{\frac{3}{2}} \|\widehat{\Delta\mathbf{b}}\|_1^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{3}(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})\|_1^{\frac{3}{2}} \|(\widehat{\Delta\mathbf{u}},\widehat{\Delta\mathbf{w}},\widehat{\Delta\mathbf{b}})\|_1^{\frac{1}{2}} \qquad (3.76)
\end{aligned}
$$

e também

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} |(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{w})^\wedge| \, d\mathbf{k} &\leq \sqrt{3}(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\|\widehat{\mathbf{u}}\|_1 \|\widehat{\Delta\mathbf{w}}\|_1^{\frac{1}{2}} \|\widehat{\mathbf{w}}\|_1^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{3}(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})\|_1^{\frac{3}{2}} \|(\widehat{\Delta\mathbf{u}},\widehat{\Delta\mathbf{w}},\widehat{\Delta\mathbf{b}})\|_1^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.77)
\end{aligned}
$$

Analogamente, chegamos a

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} |(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{b})^\wedge| \, d\mathbf{k} &\leq \sqrt{3}(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\|\widehat{\mathbf{u}}\|_1 \|\widehat{\Delta\mathbf{b}}\|_1^{\frac{1}{2}} \|\widehat{\mathbf{b}}\|_1^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{3}(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})\|_1^{\frac{3}{2}} \|(\widehat{\Delta\mathbf{u}},\widehat{\Delta\mathbf{w}},\widehat{\Delta\mathbf{b}})\|_1^{\frac{1}{2}} \qquad (3.78)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} |(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u})^\wedge|\,d\mathbf{k} &\leq \sqrt{3}(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\|\widehat{\mathbf{b}}\|_1\|\widehat{\Delta\mathbf{u}}\|_1^{\frac{1}{2}}\|\widehat{\mathbf{u}}\|_1^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{3}(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})\|_1^{\frac{3}{2}}\|(\widehat{\Delta\mathbf{u}},\widehat{\Delta\mathbf{w}},\widehat{\Delta\mathbf{b}})\|_1^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.79}
$$

Aplicando as estimativas (3.75), (3.76), (3.77), (3.78) e (3.79) em (3.73), concluímos que

$$
\partial_t\|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})\|_1+\alpha\|(\widehat{\Delta\mathbf{u}},\widehat{\Delta\mathbf{w}},\widehat{\Delta\mathbf{b}})(t)\|_1\leq 5\sqrt{3}(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})\|_1^{\frac{3}{2}}\|(\widehat{\Delta\mathbf{u}},\widehat{\Delta\mathbf{w}},\widehat{\Delta\mathbf{b}})\|_1^{\frac{1}{2}}.
$$

Utilizando a Desigualdade de Young,

$$
\partial_t\|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})\|_1+\frac{\alpha}{2}\|(\widehat{\Delta\mathbf{u}},\widehat{\Delta\mathbf{w}},\widehat{\Delta\mathbf{b}})\|_1\leq\frac{3}{16\pi^3}\alpha^{-1}\|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})\|_1^3
$$

Logo,

$$
\partial_t\|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})\|_1\leq\frac{75}{16\pi^3}\alpha^{-1}\|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})\|_1^3. \tag{3.80}
$$

Seja $\beta=\frac{75}{16\pi^3}$. Para $t_0\in[0,T^*)$, consideremos $v(t)$ a solução do PVI

$$
\begin{cases}
v'(t) = \beta\alpha^{-1}v^3(t); \\
v(t_0) = \|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})(\cdot,t_0)\|_1,
\end{cases} \tag{3.81}
$$

Pelo método de separação de variáveis para EDO's, temos que

$$
v(t)^{-2}=-2\beta\alpha^{-1}t-2c.
$$

Usando o dado inicial do PVI, obtemos

$$
-2c=\|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})(\cdot,t_0)\|_1^{-2}+2\beta\alpha^{-1}t_0.
$$

Assim,

$$
v(t)^{-2}=\|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})(\cdot,t_0)\|_1^{-2}-2\beta\alpha^{-1}(t-t_0). \tag{3.82}
$$

Segue que, $v(t)$ explode se

$$
T_v^*=t_0+\frac{\alpha}{2\beta\|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})(\cdot,t_0)\|_1^2}.
$$

Por (1.39), chegamos a

$$
\|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})(\cdot,t)\|_1\leq v(t),\quad\forall\,0\leq t<T^*.
$$

Daí, $T_v^* \leq T^*$. Com efeito, suponha por absurdo que $T^* < T_v^*$. Como

$$(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_\infty \leq \|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})(\cdot,t)\|_1 \leq v(t), \quad \forall\, 0 \leq t < T^*,$$

então a solução $(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)$ de (1) poderia ser continuada além de T^* (já que $v(t)$ é limitada em $[0,T^*)$). Isto é um absurdo, pois $T^* < \infty$ é o tempo maximal de existência desta solução. Portanto,

$$\|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})(\cdot,t_0)\|_1 \geq \Big(\frac{2\beta}{\alpha}\Big)^{-\frac{1}{2}}(T^*-t_0)^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall\, t_0 \in [0,T^*),$$

onde $\left(\frac{2\beta}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}\alpha^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{3}{2}}}{5\sqrt{3}}$. Isto prova o resultado em questão. □

O Teorema 3.5 nos permite concluir que se $(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)$ é a solução de (1) definida no intervalo de tempo $[0,T^*)$, com $T^* < \infty$, então

$$\sup_{t\in[0,T^*)} \|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})(\cdot,t)\|_1 = \infty.$$

3.3 Outro Limite Inferior Envolvendo $\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_{\dot{H}^s}$, $s > \frac{3}{2}$

Nesta seção, provaremos, para $s > \frac{3}{2}$, que

$$\lim_{t\nearrow T^*} \|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2^{\frac{2s}{3}-1}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_{\dot{H}^s} = \infty,$$

se $(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)$ é a solução de (1) definida no intervalo maximal de tempo $[0,T^*)$, com $T^* < \infty$. Mais especificamente, estabeleceremos a cota inferior apresentada no teorema abaixo:

Teorema 3.6. *Fixe $s_0 > \frac{3}{2}$ e seja $(\mathbf{u}_0,\mathbf{w}_0,\mathbf{b}_0) \in H^{s_0}(\mathbb{R}^3)$ tal que $\nabla\cdot\mathbf{u}_0 = \nabla\cdot\mathbf{b}_0 = 0$. Considere que $(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t) \in C([0,T^*),H^s(\mathbb{R}^3))$ é a solução forte de (1), definida no intervalo maximal $[0,T^*)$. Assuma que $T^* < \infty$. Então, para cada $s > \frac{3}{2}$, temos que*

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2^{\frac{2s}{3}-1}\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_{\dot{H}^s} \geq C_s\alpha^{\frac{s}{3}}(T^*-t)^{-\frac{s}{3}}, \quad \forall\, t \in [0,T^*), \tag{3.83}$$

onde $\alpha = \min\{\mu,\nu,\gamma\}$ e C_s é uma constante positiva que depende somente de s.

Demonstração. Pelo Lema 4.6 (ver Apêndice), temos, para $s > \frac{3}{2}$,

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathbf{u}}\|_1 &\leq C_s \|\mathbf{u}\|_2^{1-\frac{3}{2s}} \|\mathbf{u}\|_{\dot{H}^s}^{\frac{3}{2s}} \\ &\leq C_s \|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|_2^{1-\frac{3}{2s}} \|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|_{\dot{H}^s}^{\frac{3}{2s}}. \end{aligned} \tag{3.84}$$

Analogamente, tem-se

$$\|\widehat{\mathbf{w}}\|_1 \leq C_s \|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|_2^{1-\frac{3}{2s}} \|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|_{\dot{H}^s}^{\frac{3}{2s}} \tag{3.85}$$

e também

$$\|\widehat{\mathbf{b}}\|_1 \leq C_s \|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|_2^{1-\frac{3}{2s}} \|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|_{\dot{H}^s}^{\frac{3}{2s}}. \tag{3.86}$$

Dessa forma,

$$\|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})\|_1 \leq C_s \|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|_2^{1-\frac{3}{2s}} \|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|_{\dot{H}^s}^{\frac{3}{2s}}. \tag{3.87}$$

Pelo Teorema 3.5, chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{2}\alpha^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{3}{2}}}{5\sqrt{3}}(T^*-t)^{-\frac{1}{2}} &\leq \|(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{w}},\widehat{\mathbf{b}})\|_1 \\ &\leq C_s \|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|_2^{1-\frac{3}{2s}} \|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|_{\dot{H}^s}^{\frac{3}{2s}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\Big[\frac{2\sqrt{2}\alpha^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{3}{2}}}{5\sqrt{3}}\Big]^{\frac{2s}{3}}(T^*-t)^{-\frac{s}{3}} \leq C_s^{\frac{2s}{3}} \|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|_2^{\frac{2s}{3}(1-\frac{3}{2s})} \|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})\|_{\dot{H}^s}.$$

Portanto,

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2^{\frac{2s}{3}-1} \|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_{\dot{H}^s} \geq C_s \alpha^{\frac{s}{3}} (T^*-t)^{-\frac{s}{3}}, \quad \forall\, t \in [0,T^*).$$

Isto completa a prova do Teorema 3.6. □

Segue diretamente do Teorema 3.6 que se $(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)$ é a solução forte de (1) em $[0,T^*)$, com $T^* < \infty$, então

$$\sup_{t\in[0,T^*)} \Big\{ \|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_2^{\frac{2s}{3}-1} \|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_{\dot{H}^s} \Big\} = \infty,$$

para $s > \frac{3}{2}$. Isto equivale a dizer que $(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b}(\cdot,t))$ é solução global no tempo de (1) se o supremo acima é finito. É importante destacar também que o Teorema 3.6 e o Lema 3.1 nos permitem concluir o seguinte limite inferior para esta mesma solução $(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)$:

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{b})(\cdot,t)\|_{\dot{H}^s} \geq C_s \alpha^{\frac{s}{3}} \|(\mathbf{u}_0,\mathbf{w}_0,\mathbf{b}_0)\|_2^{1-\frac{2s}{3}} (T^*-t)^{-\frac{s}{3}}, \quad \forall\, t \in [0,T^*),$$

onde $s > \frac{3}{2}$ e $T^* < \infty$.

Capítulo 4

Apêndice

Neste capítulo, apresentaremos alguns lemas que foram aplicados nos Capítulos 2 e 3 desta dissertação. Mais precisamente, exibiremos uma prova para cada um destes resultados. Entre estes, podemos citar algumas estimativas de decaimento para a solução da clássica equação do calor e uma desigualdade do tipo Gronwall.

4.1 Resultados Básicos para o Capítulo 2

Nesta seção, estabelecemos alguns resultados que estão presentes nas provas do Capítulo 2. Comecemos com uma desigualdade integral do tipo Gronwall. É importante destacar que o lema abaixo foi aplicado no Corolário 2.3, no Teorema 2.2 e nas Proposições 2.2 e 2.5.

Lema 4.1. *Sejam* $A \geq 0, B > 0, 0 < \omega < 1$ *e* $\phi \in C^0([0,T[)$ *satisfazendo*

$$0 \leq \phi(t) \leq A + B\int_0^t (t-s)^{-\omega}\phi(s)\, ds, \quad \forall\, 0 \leq t < T. \tag{4.1}$$

Então, $\phi(t) \leq C_T$, *para todo* $0 \leq t < T$, *onde* $C_T > 0$ *é uma constante positiva que depende somente de* A, B, ω *e* T.

Demonstração. Primeiramente, escolha $\epsilon > 0$ tal que

$$\int_0^\epsilon z^{-\omega}\, dz = \frac{\epsilon^{1-\omega}}{1-\omega} \leq \frac{1}{2B}. \tag{4.2}$$

Assim sendo, considere $t_0 \in [0,t]$, com $t \in [0,T)$, tal que

$$\phi(t_0) = \max_{0 \le s \le t} \phi(s).$$

Este máximo existe devido à continuidade de ϕ.

Analisemos dois casos:

Caso 1: Assuma que $t_0 \ge \epsilon$.

Por aplicar (4.1), encontramos

$$\begin{aligned}
\phi(t_0) &\le A + B\int_0^{t_0} (t_0 - s)^{-\omega}\phi(s)\,ds \\
&= A + B\int_0^{t_0-\epsilon} (t_0 - s)^{-\omega}\phi(s)ds + B\int_{t_0-\epsilon}^{t_0} (t_0 - s)^{-\omega}\phi(s)\,ds.
\end{aligned}$$

A primeira integral da última desigualdade acima pode ser estimada da seguinte maneira:

$$\int_0^{t_0-\epsilon} (t_0 - s)^{-\omega}\phi(s)\,ds \le \epsilon^{-\omega}\int_0^{t_0} \phi(s)\,ds.$$

Já para a segunda integral, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{t_0-\epsilon}^{t_0} (t_0 - s)^{-\omega}\phi(s)\,ds &\le \int_{t_0-\epsilon}^{t_0} (t_0 - s)^{-\omega}\phi(t_0)\,ds \\
&= \phi(t_0)\int_{t_0-\epsilon}^{t_0} (t_0 - s)^{-\omega}\,ds \\
&= \phi(t_0)\cdot\frac{\epsilon^{1-\omega}}{1-\omega} \\
&\le \frac{\phi(t_0)}{2B},
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos (4.2). Deste modo, podemos inferir

$$\phi(t_0) \le A + B\epsilon^{-\omega}\int_0^{t_0} \phi(s)ds + \frac{1}{2}\cdot\phi(t_0),$$

ou equivalentemente,

$$\phi(t_0) \le 2A + 2B\epsilon^{-\omega}\int_0^{t_0} \phi(s)\,ds.$$

Assim, pela definição de máximo, chegamos a

$$\phi(t) \le 2A + 2B\epsilon^{-\omega}\int_0^{t_0} \phi(s)\,ds, \quad \forall\, 0 \le t < T.$$

Caso 2: Assuma que $0 \leq t_0 \leq \epsilon$.

Neste caso, por (4.2), obtemos

$$\begin{aligned}
\phi(t_0) &\leq A + B\int_0^{t_0}(t_0 - s)^{-\omega}\phi(s)\,ds \\
&\leq A + B\int_0^{t_0}(t_0 - s)^{-\omega}\phi(t_0)\,ds \\
&= A + B\phi(t_0)\int_0^{t_0} z^{-\omega}\,dz \\
&\leq A + B\phi(t_0)\int_0^{\epsilon} z^{-\omega}\,dz \\
&\leq A + \frac{1}{2}\phi(t_0).
\end{aligned}$$

Consequentemente, $\phi(t) \leq \phi(t_0) \leq 2A$ (ver definição de t_0). Com isso,

$$\phi(t) \leq 2A + 2B\epsilon^{-\omega}\int_0^t \phi(s)\,ds, \quad \forall\, 0 \leq t < T.$$

Por fim, usando o Lema de Gronwall, obtemos, através dos dois casos relatados acima, que

$$\begin{aligned}
\phi(t) &\leq 2A\exp(2B\epsilon^{-\omega}t) \\
&\leq 2A\exp(2B\epsilon^{-\omega}T), \quad \forall\, 0 \leq t < T.
\end{aligned}$$

Isto completa a prova do Lema 4.1. $\square$

O resultado a seguir é útil na prova da Desigualdade de Leray obtida no Capítulo 2 (ver Teorema 2.4).

Lema 4.2. *Seja $W \in C^1([0,T))$ uma função positiva satisfazendo a desigualdade*

$$W'(t) \leq CW(t)^{\omega}, \quad \forall\, 0 \leq t < T, \tag{4.3}$$

onde $\omega > 1$ e $C > 0$ são constantes positivas. Se $T < \infty$ e $\sup_{0 \leq t < T} W(t) = \infty$, então temos

$$W(t) \geq \frac{1}{[C(\omega - 1)]^{\frac{1}{\omega-1}}}(T - t)^{\frac{-1}{\omega-1}}, \quad \forall\, 0 \leq t < T. \tag{4.4}$$

Demonstração. Sejam $t_0 \in [0,T)$ arbitrário e $v = v(t)$ a solução para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} v'(t) = Cv(t)^\omega, \\ v(t_0) = W_0, \end{cases}$$

onde $W_0 := W(t_0)$. É possível determinar v explicitamente aplicando o método de separação de variáveis para equações diferenciais ordinárias. Assim,

$$v(t) = W_0[1 - (\omega-1)C(t-t_0)]W_0^{\omega-1}]^{-\frac{1}{\omega-1}}.$$

Observe que, $v(t)$ está definido para todo $t_0 \le t < T_* := t_0 + \frac{1}{C(\omega-1)W_0^{\omega-1}}$. Consequentemente, por (1.39) e pela desigualdade (4.3), temos que

$$W(t) \le v(t), \quad \forall\, t_0 \le t < T_*.$$

Note que, $\lim_{t\nearrow T_*} v(t) = \infty$; além disso, $v(t)$ é limitada no intervalo $[t_0, T^*)$. Suponhamos, por absurdo, que $T < T_*$. Consequentemente,

$$W(t) \le v(t), \quad \forall\, t_0 \le t < T.$$

Isto implica que $W(t)$ é limitada em $[t_0, T)$. Como $W(t)$ é contínua em $[0,T)$, então teríamos $W(t)$ limitada em $[0, t_0]$ também. Mas, isto contradiz o fato que $\sup_{0\le t<T} W(t) = \infty$. Deste modo, $T_* \le T$, isto é,

$$t_0 + \frac{1}{C(\omega-1)W_0^{\omega-1}} \le T,$$

ou equivalentemente,

$$W(t_0) \ge \left[\frac{1}{C(\omega-1)}\right]^{\frac{1}{\omega-1}} (T-t_0)^{\frac{-1}{\omega-1}}.$$

Isto completa a prova do Lema 4.2. $\square$

O lema a seguir é útel na prova do Teorema 2.1.

Lema 4.3. *Seja* $(\mathbf{u},\mathbf{b})(\cdot,t)$ *solução forte do sistema* (4) *definida no intervalo maximal* $[0,T^*)$. *Assuma que* $m \ge j+2$. *Então,*

$$\|(D^j\mathbf{u}, D^j\mathbf{b})(\cdot,t)\|_\infty \le C_j(J_m(t) + J_0(t)), \quad \forall\, t \in [0,T^*),$$

onde C_j *é uma constante positiva que depende somente de* j.

Demonstração. De fato, pela desigualdade (1.34), tem-se que

$$\begin{aligned}
\|(D^j\mathbf{u}, D^j\mathbf{b})\|_\infty^2 &\leq C_j\|(D^j\mathbf{u}, D^j\mathbf{b})\|_{H^2}^2 \\
&= C_j \sum_{|\alpha|\leq 2} \|(D^\alpha D^j\mathbf{u}, D^\alpha D^j\mathbf{b})\|_2^2 \\
&\leq C_j(J_j^2(t) + J_{j+1}^2(t) + J_{j+2}^2(t)).
\end{aligned}$$

Notemos que, pela desigualdade (1.22), já que $j+2 > j$, obtem-se

$$J_j^2(t) \leq C_j(J_{j+2}^2(t) + J_0^2(t)).$$

Além disso,

$$J_{j+1}^2(t) \leq C_j(J_{j+2}^2(t) + J_0^2(t)),$$

pois $j+2 > j+1$. Assim,

$$\|(D^j\mathbf{u}, D^j\mathbf{b})\|_\infty^2 \leq C_j(J_{j+2}^2(t) + J_0^2(t)).$$

Mas, pela desigualdade (1.22),

$$J_{j+2}^2(t) \leq C_j(J_m^2(t) + J_0^2(t)), \quad \forall\, m \geq j+2.$$

Portanto,

$$\|(D^j\mathbf{u}, D^j\mathbf{b})(\cdot,t)\|_\infty^2 \leq C_j(J_m^2(t) + J_0^2(t)), \quad \forall\, m \geq j+2,$$

para todo $t \in [0, T^*)$. Isto prova o resultado em questão. $\square$

4.2 Resultados Básicos para o Capítulo 3

Nesta seção, demonstraremos alguns resultados que foram utilizados no Capítulo 3 desta dissertação. Comecemos com dois resultados que desempenham papel importante na prova do Teorema 3.1.

Lema 4.4. *Seja $f \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap \dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$, onde $s \geq \frac{1}{2} + \delta$, com $\delta > 0$. Então $f \in \dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}(\mathbb{R}^3)$. Além disso, tem-se*

$$\|f\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}} \leq \|f\|_2^{1-\theta}\|f\|_{\dot{H}^s}^\theta,$$

onde $\theta = (\frac{1}{2} + \delta)\frac{1}{s} \in (0, 1]$.

Demonstração. Este resultado segue diretamente da Desigualdade de Hölder e da Identidade de Parseval. De fato, pela Desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}} &:= \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{k}|^{2(\frac{1}{2}+\delta)} |\widehat{f}(\mathbf{k})|^2 \, d\mathbf{k} \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{k}|^{1+2\delta} |\widehat{f}(\mathbf{k})|^{2\theta} |\widehat{f}(\mathbf{k})|^{2(1-\theta)} \, d\mathbf{k} \\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{k}|^{2s} |\widehat{f}(\mathbf{k})|^2 \, d\mathbf{k} \right)^{\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{f}(\mathbf{k})|^2 \, d\mathbf{k} \right)^{1-\theta} \\
&=: \|f\|^{\frac{\theta}{2}}_{\dot{H}^s} \|\widehat{f}\|_2^{\frac{1-\theta}{2}}.
\end{aligned}$$

O resultado segue da Identidade de Parseval. □

Lema 4.5. *Seja $f \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ tal que $\nabla f \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$, onde $s \ge \frac{1}{2} + \delta$, com $0 < \delta < 1$. Então, $f \in \dot{H}^{s+1-\delta}(\mathbb{R}^3)$. Além disso,*

$$\|f\|_{\dot{H}^{s+1-\delta}} \le \|f\|^{\delta}_{\dot{H}^s} \|\nabla f\|^{1-\delta}_{\dot{H}^s}.$$

Demonstração. Como $|\widehat{\nabla f}| = |\mathbf{k}||\widehat{f}|$, então, pela Desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{\dot{H}^{s+1-\delta}} &= \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{k}|^{2(s+1-\delta)} |\widehat{f}(\mathbf{k})|^2 \, d\mathbf{k} \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{k}|^{2s\delta} |\widehat{f}(\mathbf{k})|^{2\delta} |\mathbf{k}|^{2(s+1)(1-\delta)} |\widehat{f}(\mathbf{k})|^{2(1-\delta)} \, d\mathbf{k} \\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{k}|^{2s} |\widehat{f}(\mathbf{k})|^2 \, d\mathbf{k} \right)^{\delta} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{k}|^{2s} |\mathbf{k}|^2 |\widehat{f}(\mathbf{k})|^2 \, d\mathbf{k} \right)^{1-\delta} \\
&= \|f\|^{2\delta}_{\dot{H}^s} \|\nabla f\|^{2(1-\delta)}_{\dot{H}^s}.
\end{aligned}$$

Isto conclui a prova do Lema 4.5. □

O Lema a seguir está aplicado na demonstração do Teorema 3.6.

Lema 4.6. *Seja $f \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap \dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$, onde $s > \frac{3}{2}$. Então, $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^3)$. Além disso,*

$$\|\widehat{f}\|_1 \le C_s \|f\|_2^{1-\frac{3}{2s}} \|f\|^{\frac{3}{2s}}_{\dot{H}^s}, \tag{4.5}$$

onde C_s é uma constante positiva que depende somente de s.

Demonstração. Primeiramente, vamos provar a desigualdade abaixo.

$$\|\widehat{f}\|_1 \le C_s \|f\|_{H^s}. \tag{4.6}$$

Com efeito, pela Desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned}
\|\widehat{f}\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^3} (1+|\mathbf{k}|^2)^{-\frac{s}{2}}(1+|\mathbf{k}|^2)^{\frac{s}{2}}|\widehat{f}|\,d\mathbf{k} \\
&\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\mathbf{k}|^2)^{-s}d\mathbf{k}\Big)^{\frac{1}{2}}\|f\|_{H^s}.
\end{aligned}$$

Assim, para mostrarmos (4.6), basta verificarmos que

$$\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\mathbf{k}|^2)^{-s}d\mathbf{k} < \infty.$$

Notemos que, por coordenadas polares, encontramos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\mathbf{k}|^2)^{-s}\,d\mathbf{k} &= \int_0^\infty (1+r^2)^{-s}\int_{B_r[0]} dS dr \\
&= C\int_0^\infty (1+r^2)^{-s}r^2\,dr \\
&= C\Big(\int_0^1 \frac{r^2}{(1+r^2)^s}\,dr + \int_1^\infty \frac{r^2}{(1+r^2)^s}\,dr\Big) \qquad (4.7)\\
&\leq C\Big(C_s + \int_1^\infty r^{2(1-s)}dr\Big) \\
&= C\Big(C_s + \frac{r^{2(1-s)+1}}{2(1-s)+1}\Big|_1^\infty\Big) \\
&= C\Big(C_s + \frac{1}{-1-2(1-s)}\Big) \\
&=: C_s,
\end{aligned}$$

onde $s > \frac{3}{2}$. Além disso, a primeira integral em (4.7) é finita pois consideramos a integração de uma função contínua definida no compacto $[0,1]$. Assim, (4.6) está demonstrada.

Agora, utilizemos a desigualdade (4.6) e um argumento de escala do tipo $g(\mathbf{x}) = f(\lambda\mathbf{x})$, com $\lambda > 0$ a ser escolhido a seguir, para verificarmos (4.5). Observemos que, por uma simples mudança de variável, concluímos

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}}f(\lambda\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \\
&= \frac{1}{\lambda^3}\cdot\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-i(\frac{\mathbf{y}}{\lambda})\cdot\mathbf{k}}f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} \\
&= \frac{1}{\lambda^3}\widehat{f}\Big(\frac{\mathbf{k}}{\lambda}\Big).
\end{aligned}$$

Consequentemente, podemos escrever

$$\|\widehat{f}\|_1 = \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{f}(\mathbf{k})|\, d\mathbf{k} = \int_{\mathbb{R}^3} \lambda^3 |\widehat{g}(\lambda \mathbf{k})|\, d\mathbf{k} = \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{g}(\boldsymbol{\eta})|\, d\boldsymbol{\eta} = \|\widehat{g}\|_1. \tag{4.8}$$

Utilizando (4.6) e (4.8), temos que

$$\begin{aligned}
\|\widehat{f}\|_1 &\leq C_s \|g\|_{H^s} \\
&=: C_s \Big(\int_{\mathbb{R}^3} (1+|\mathbf{k}|^2)^s |\widehat{g}(\mathbf{k})|^2\, d\mathbf{k} \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= C_s \Big(\int_{\mathbb{R}^3} (1+|\mathbf{k}|^2)^s \frac{1}{\lambda^6} |\widehat{f}\Big(\frac{\mathbf{k}}{\lambda}\Big)|^2\, d\mathbf{k} \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{C_s}{\lambda^{\frac{3}{2}}} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} (1+\lambda^2|\boldsymbol{\eta}|^2)^s |\widehat{f}(\boldsymbol{\eta})|\, d\boldsymbol{\eta} \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_s \Big(\int_{\mathbb{R}^3} \Big(\frac{1}{\lambda^3} + \lambda^{2s-3} |\boldsymbol{\eta}|^{2s} \Big) |\widehat{f}(\boldsymbol{\eta})|^2\, d\boldsymbol{\eta} \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= C_s \Big(\frac{1}{\lambda^3} \|\widehat{f}\|_2^2 + \lambda^{2s-3} \|f\|_{\dot{H}^s}^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Pela Identidade de Parseval, concluímos que

$$\|\widehat{f}\|_1 \leq C_s \Big(\frac{1}{\lambda^3} \|f\|_2^2 + \lambda^{2s-3} \|f\|_{\dot{H}^s}^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Escolhendo $\lambda = \left(\frac{3}{2s-3}\right)^{\frac{1}{2s}} \left(\frac{\|f\|_2}{\|f\|_{\dot{H}^s}}\right)^{\frac{1}{s}} > 0$, encontramos

$$\|\widehat{f}\|_1 \leq C_s \|f\|_2^{1-\frac{3}{2s}} \|f\|_{\dot{H}^s}^{\frac{3}{2s}}.$$

Isto prova o resultado em questão. $\square$

A seguir estabeleceremos algumas estimativas para a solução (e suas derivadas espaciais) de um problema de valor inicial envolvendo a equação do calor.

Consideremos o problema de Cauchy para equação do calor

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t = \sigma \Delta \mathbf{u}, & t > 0,\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{4.10}$$

Aqui $\sigma > 0$ e $\mathbf{u}_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^N)$, para algum $p_0 \in [1, \infty]$. A solução para (4.10) é dada por

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \mathbf{u}_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \tag{4.11}$$

onde

$$\phi(\mathbf{x},t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4\sigma t}}, & \text{se} \quad t > 0 \\ 0, & \text{se} \quad t < 0, \end{cases}$$

Além disso,

$$D^\alpha \mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^N} D^\alpha_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)\mathbf{u}_0(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}, \int_{\mathbb{R}^N} \phi(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x} = \sigma^{\frac{N}{2}} \ \text{ e } \ 0 < \phi(\mathbf{x},t) \leq (4\pi t)^{-\frac{N}{2}}, \quad (4.12)$$

para todo $t > 0$ (ver [15]).

Comecemos estimando a solução $\mathbf{u}(\cdot,t)$ em função do dado inicial $\mathbf{u}_0$. Mais precisamente, o seguinte decaimento é válido:

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_r \leq C\|\mathbf{u}_0\|_r, \quad \forall\, t > 0.$$

A prova da desigualdade acima está estabelecida no lema abaixo, o qual é um fator importante na prova do Teorema 2.5 e do Lema 2.3.

Lema 4.7. *Seja* $\mathbf{u}(\cdot,t)$ *a solução do problema* (4.10) *definida no intervalo de tempo* $t > 0$*. Assuma que* $1 \leq r \leq \infty$*. Então,*

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_r \leq \sigma^{\frac{N}{2}}\|\mathbf{u}_0\|_r, \quad \forall\, t > 0.$$

Demonstração. Realizaremos esta prova em alguns casos.

Caso 1: Assuma que $r = \infty$.

Assim, usando (4.11) e (4.12), obtemos

$$|\mathbf{u}(\mathbf{x},t)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)|\mathbf{u}_0(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y} \leq \|\mathbf{u}_0\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \phi(\mathbf{z},t)\,d\mathbf{z} = \sigma^{\frac{N}{2}}\|\mathbf{u}_0\|_\infty,$$

para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$. Consequentemente, chegamos a

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_\infty \leq \sigma^{\frac{N}{2}}\|\mathbf{u}_0\|_\infty.$$

Caso 2: Considere que $r = 1$.

Dessa forma, por (4.11) e (4.12), encontramos

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)|\mathbf{u}_0(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y}d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(\mathbf{z},t)\,d\mathbf{z}\int_{\mathbb{R}^N} |\mathbf{u}_0(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y} = \sigma^{\frac{N}{2}}\|\mathbf{u}_0\|_1.$$

Caso 3: Por último, assuma que $1 < r < \infty$.

Dessa forma, pela Desigualdade de Hölder, (4.11) e (4.12), obtemos

$$\begin{aligned}
|\mathbf{u}(\mathbf{x},t)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)|\mathbf{u}_0(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y} \\
&\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)\,d\mathbf{y}\Big)^{\frac{1}{r'}} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)|\mathbf{u}_0(\mathbf{y})|^r\,d\mathbf{y}\Big)^{\frac{1}{r}} \\
&= \sigma^{\frac{N}{2r'}} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)|\mathbf{u}_0(\mathbf{y})|^r\,d\mathbf{y}\Big)^{\frac{1}{r}},
\end{aligned}$$

onde $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$. Consequentemente, por (4.12), chegamos a

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_r^r &\leq \sigma^{\frac{Nr}{2r'}} \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)|\mathbf{u}_0(\mathbf{y})|^r\,d\mathbf{y}d\mathbf{x} \\
&= \sigma^{\frac{Nr}{2r'}} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(\mathbf{z},t)\,d\mathbf{z} \int_{\mathbb{R}^N} |\mathbf{u}_0(\mathbf{y})|^r\,d\mathbf{y} \\
&= \sigma^{\frac{Nr}{2}} \|\mathbf{u}_0\|_r^r.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_r \leq \sigma^{\frac{N}{2}} \|\mathbf{u}_0\|_r, \quad \forall\, t>0.$$

□

A seguir provaremos o seguinte limite de decaimento:

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_\infty = 0.$$

onde $\mathbf{u}(\cdot,t)$ é solução do problema (4.10).

Lema 4.8. *Seja $\mathbf{u}(\cdot,t)$ a solução do problema* (4.10) *definida no intervalo de tempo $t>0$. Assuma que $1\leq r<\infty$. Então,*

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_\infty \leq (4\pi t)^{-\frac{N}{2r}} \sigma^{\frac{N}{2r'}} \|\mathbf{u}_0\|_r, \quad \forall\, t>0.$$

Demonstração. Faremos esta demonstração em dois casos:

Caso 1: Considere que $r=1$.

Assim, por (4.11) e (4.12), temos

$$|\mathbf{u}(\mathbf{x},t)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)|\mathbf{u}_0(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y} \leq (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} \|\mathbf{u}_0\|_1,$$

para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$. Portanto, podemos escrever

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_\infty \leq (4\pi t)^{-\frac{N}{2}}\|\mathbf{u}_0\|_1.$$

Caso 2: Assuma que $1 < r < \infty$.

Usando a Desigualdade de Hölder, (4.11) e (4.12), segue que

$$\begin{aligned}
|\mathbf{u}(\mathbf{x},t)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)|\mathbf{u}_0(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)^{\frac{1}{r'}}\phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)^{\frac{1}{r}}|\mathbf{u}_0(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y} \\
&\leq (4\pi t)^{-\frac{N}{2r}} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)^{\frac{1}{r'}}|\mathbf{u}_0(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y} \\
&\leq (4\pi t)^{-\frac{N}{2r}} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)\,d\mathbf{y}\Big)^{\frac{1}{r'}} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |\mathbf{u}_0(\mathbf{y})|^r\,d\mathbf{y}\Big)^{\frac{1}{r}} \\
&= (4\pi t)^{-\frac{N}{2r}}\sigma^{\frac{N}{2r'}}\|\mathbf{u}_0\|_r,
\end{aligned}$$

onde $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$. Portanto, o resultado em questão segue. □

O lema a seguir além de generalizar os dois lemas anteriores também garante que $\lim\limits_{t\to\infty}\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_q = 0$, para todo $q > 1$.

Lema 4.9. *Seja* $\mathbf{u}(\cdot,t)$ *a solução do problema* (4.10) *definida no intervalo de tempo* $t > 0$*. Assuma que* $1 \leq r \leq q \leq \infty$*. Então,*

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_q \leq (4\pi t)^{-\lambda}\sigma^{\frac{N}{2}[\frac{1}{r'}+\frac{1}{q}]}\|\mathbf{u}_0\|_r, \quad \forall\, t > 0,$$

onde $\lambda = \frac{N}{2}\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right]$.

Demonstração. O caso $q=\infty$ segue diretamente do Lema 4.8. Para $1 \leq r \leq q < \infty$, aplique os Lemas 4.7 e 4.8, em ordem a obter

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_q^q &= \int_{\mathbb{R}^N} |\mathbf{u}(\mathbf{x},t)|^{q-r}|\mathbf{u}(\mathbf{x},t)|^r\,d\mathbf{x} \\
&\leq \|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_\infty^{q-r}\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_r^r \\
&\leq (4\pi t)^{-\frac{N}{2r}(q-r)}\sigma^{\frac{N}{2r'}(q-r)}\|\mathbf{u}_0\|_r^{q-r}\sigma^{\frac{N}{2}\cdot r}\|\mathbf{u}_0\|_r^r \\
&= (4\pi t)^{-\frac{N}{2}(\frac{q}{r}-1)}\sigma^{\frac{N}{2}(\frac{q}{r'}+1)}\|\mathbf{u}_0\|_r^q
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_q \leq (4\pi t)^{-\lambda}\sigma^{\frac{N}{2}\left[\frac{1}{r'}+\frac{1}{q}\right]}\|\mathbf{u}_0\|_r,$$

para todo $t > 0$ e $\lambda = \frac{N}{2}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right]$. $\square$

Agora estamos interessados em encontrar estimativas semelhantes às obtidas nos três lemas anteriores para as derivadas espaciais da solução $\mathbf{u}(\cdot,t)$ de (4.10).

Primeiramente, definamos

$$g(\mathbf{z}) = e^{-\frac{|\mathbf{z}|^2}{4}}.$$

Notemos que,

$$D^\alpha g(\mathbf{z}) = p_\alpha(\mathbf{z})g(\mathbf{z}),$$

onde $p_\alpha(\mathbf{z})$ é um polinômio. Assim,

$$D^\alpha g(z) \to 0 \quad \text{quando} \quad |\mathbf{z}| \to \infty.$$

Portanto, $D^\alpha g(\mathbf{z})$ é uma função limitada. Além disso,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |D^\alpha g(\mathbf{z})|\, d\mathbf{z} = C_{\alpha,N} < \infty,$$

onde $C_{\alpha,N}$ é uma constante positiva que depende somente do multi-índice α e N; e também

$$\phi(\mathbf{x},t) = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}}e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4\sigma t}} = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}}g\Big(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\sigma t}}\Big), \quad \forall\, t > 0.$$

Logo,

$$D^\alpha\phi(\mathbf{x},t) = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}}D^\alpha g\Big(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\sigma t}}\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{\sigma t}}\Big)^{|\alpha|} \ \text{ e } \ |D^\alpha\phi(\mathbf{x},t)| \leq C_{\alpha,N}\sigma^{-\frac{|\alpha|}{2}}t^{-\frac{N}{2}-\frac{|\alpha|}{2}}.$$

Consequentemente, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |D^\alpha\phi(\mathbf{x},t)|\, d\mathbf{x} &= (4\pi t)^{-\frac{N}{2}}(\sigma t)^{-\frac{|\alpha|}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}\Big|D^\alpha g\Big(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\sigma t}}\Big)\Big|\, d\mathbf{x} \\
&= (4\pi t)^{-\frac{N}{2}}(\sigma t)^{-\frac{|\alpha|}{2}}(\sigma t)^{\frac{N}{2}}\int_{\mathbb{R}^N} |D^\alpha g(\mathbf{z})|\, d\mathbf{z} \\
&= (4\pi t)^{-\frac{N}{2}}(\sigma t)^{-\frac{|\alpha|}{2}+\frac{N}{2}}C_{\alpha,N} \\
&= C_{\alpha,N}\sigma^{\frac{N-|\alpha|}{2}}t^{-\frac{|\alpha|}{2}}.
\end{aligned}$$

Se $\mathbf{u}(\cdot,t)$ é a solução do problema (4.10) definida para todo tempo, então podemos provar que

$$\lim_{t\to\infty} \|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot,t)\|_r = 0, \quad \forall\, 1 \leq r \leq \infty,$$

fornecido que $|\alpha| > 0$. Tal limite segue do resultado abaixo.

Lema 4.10. *Seja $\mathbf{u}(\cdot,t)$ a solução do problema (4.10) definida no intervalo de tempo $t > 0$. Assuma que $1 \leq r \leq \infty$. Então,*

$$\|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot,t)\|_r \leq C_{\alpha,N}\sigma^{\frac{N}{2}-\frac{|\alpha|}{2}} t^{-\frac{|\alpha|}{2}} \|\mathbf{u}_0\|_r, \quad \forall\, t > 0,$$

onde $C_{\alpha,N}$ é uma constante positiva que depende somente do multi-índice α e N.

Demonstração. Para $r = \infty$, temos que

$$\begin{aligned}
|D^\alpha \mathbf{u}(\mathbf{x},t)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |D^\alpha \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)||\mathbf{u}_0(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y} \\
&\leq \|\mathbf{u}_0\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |D^\alpha \phi(\mathbf{z},t)|\, d\mathbf{z} \\
&= C_{\alpha,N}\sigma^{\frac{N-|\alpha|}{2}} t^{-\frac{|\alpha|}{2}} \|\mathbf{u}_0\|_\infty,
\end{aligned}$$

para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$. Logo,

$$\|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot,t)\|_\infty \leq C_{\alpha,N}\sigma^{\frac{N-|\alpha|}{2}} t^{-\frac{|\alpha|}{2}} \|\mathbf{u}_0\|_\infty.$$

Para $r = 1$, encontramos

$$\begin{aligned}
\|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot,t)\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} |D^\alpha \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)||\mathbf{u}_0(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y}d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |D^\alpha \phi(\mathbf{z},t)|\, d\mathbf{z} \int_{\mathbb{R}^N} |\mathbf{u}_0(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y} \\
&\leq C_{\alpha,N}\sigma^{\frac{N-|\alpha|}{2}} t^{-\frac{|\alpha|}{2}} \|\mathbf{u}_0\|_1.
\end{aligned}$$

Por último, para $1 < r < \infty$, pela Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
|D^\alpha \mathbf{u}(\mathbf{x},t)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |D^\alpha \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)||\mathbf{u}_0(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y} \\
&\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |D^\alpha \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)|\, d\mathbf{y}\Big)^{\frac{1}{r'}} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |D^\alpha \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)||\mathbf{u}_0(\mathbf{y})|^r\, d\mathbf{y}\Big)^{\frac{1}{r}} \\
&= C_{\alpha,N}^{\frac{1}{r'}}\sigma^{\frac{N-|\alpha|}{2r'}} t^{-\frac{|\alpha|}{2r'}} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |D^\alpha \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)||\mathbf{u}_0(\mathbf{y})|^r\, d\mathbf{y}\Big)^{\frac{1}{r}},
\end{aligned}$$

onde $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$. Daí,

$$\begin{aligned}
\|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot,t)\|_r^r &\leq C_{\alpha,N}^{\frac{r}{r'}}\sigma^{\frac{N-|\alpha|}{2}\cdot\frac{r}{r'}}t^{-\frac{|\alpha|}{2}\cdot\frac{r}{r'}}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}|D^\alpha\phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)||\mathbf{u}_0(\mathbf{y})|^r\,d\mathbf{y}d\mathbf{x}\\
&= C_{\alpha,N}^{\frac{r}{r'}}\sigma^{\frac{N-|\alpha|}{2}\cdot\frac{r}{r'}}t^{-\frac{|\alpha|}{2}\cdot\frac{r}{r'}}\int_{\mathbb{R}^N}|D^\alpha\phi(\mathbf{z},t)|\,d\mathbf{z}\int_{\mathbb{R}^N}|\mathbf{u}_0(\mathbf{y})|^r\,d\mathbf{y}\\
&\leq C_{\alpha,N}^{\frac{r}{r'}}\sigma^{\frac{N-|\alpha|}{2}\cdot\frac{r}{r'}}t^{-\frac{|\alpha|}{2}\cdot\frac{r}{r'}}C_{\alpha,N}\sigma^{\frac{N-|\alpha|}{2}}t^{-\frac{|\alpha|}{2}}\|\mathbf{u}_0\|_r^r\\
&= C_{\alpha,N}^r\sigma^{\frac{N-|\alpha|}{2}\cdot r}t^{-\frac{|\alpha|}{2}\cdot r}\|\mathbf{u}_0\|_r^r.
\end{aligned}$$

O resultado segue. □

O lema a seguir estabelece uma estimativa de dacaimento para a norma-L^∞ de qualquer derivada espacial de uma solução de (4.10).

Lema 4.11. *Seja $\mathbf{u}(\cdot,t)$ a solução do problema (4.10) definida no intervalo de tempo $t>0$. Assuma que $1\leq r<\infty$. Então,*

$$\|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot,t)\|_\infty \leq C_{\alpha,N}\sigma^{\frac{N}{2r'}-\frac{|\alpha|}{2}}t^{-\frac{N}{2r}-\frac{|\alpha|}{2}}\|\mathbf{u}_0\|_r,\quad \forall\, t>0,$$

onde $C_{\alpha,N}$ é uma constante positiva que depende somente do multi-índice α e N.

Demonstração. Para $r=1$, temos

$$\begin{aligned}
|D^\alpha \mathbf{u}(\mathbf{x},t)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N}|D^\alpha\phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)||\mathbf{u}_0(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y}\\
&\leq C_{\alpha,N}\sigma^{-\frac{|\alpha|}{2}}t^{-\frac{N}{2}-\frac{|\alpha|}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}|\mathbf{u}_0(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y}\\
&= C_{\alpha,N}\sigma^{-\frac{|\alpha|}{2}}t^{-\frac{N}{2}-\frac{|\alpha|}{2}}\|\mathbf{u}_0\|_1,
\end{aligned}$$

para $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^N$. Assim,

$$\|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot,t)\|_\infty \leq C_{\alpha,N}\sigma^{-\frac{|\alpha|}{2}}t^{-\frac{N}{2}-\frac{|\alpha|}{2}}\|\mathbf{u}_0\|_1.$$

Para $1 < r < \infty$, pela Desigualdade de Hölder, segue que

$$
\begin{aligned}
|D^\alpha \mathbf{u}(\mathbf{x},t)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |D^\alpha \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)||\mathbf{u}_0(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |D^\alpha \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)|^{\frac{1}{r'}} |D^\alpha \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)|^{\frac{1}{r}} |\mathbf{u}_0(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y} \\
&\leq C_{\alpha,N}^{\frac{1}{r}} \sigma^{-\frac{|\alpha|}{2}\cdot\frac{1}{r}} t^{(-\frac{N}{2}-\frac{|\alpha|}{2})\frac{1}{r}} \int_{\mathbb{R}^N} |D^\alpha \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)|^{\frac{1}{r'}} |\mathbf{u}_0(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y} \\
&\leq C_{\alpha,N}^{\frac{1}{r}} \sigma^{-\frac{|\alpha|}{2}\cdot\frac{1}{r}} t^{(-\frac{N}{2}-\frac{|\alpha|}{2})\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |D^\alpha \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)|\, d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{r'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\mathbf{u}_0(\mathbf{y})|^r\, d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{r}} \\
&= C_{\alpha,N} \sigma^{\frac{N}{2r'}-\frac{|\alpha|}{2}} t^{-\frac{N}{2r}-\frac{|\alpha|}{2}} \|\mathbf{u}_0\|_r,
\end{aligned}
$$

para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$. Dessa forma, o resultado em questão segue. □

O lema abaixo, além de generalizar os Lemas 4.10 e 4.11, está aplicado no Teorema 2.5 e no Lema 2.3.

Lema 4.12. *Seja* $\mathbf{u}(\cdot,t)$ *a solução do problema* (4.10) *definida no intervalo de tempo* $t > 0$*. Assuma que* $1 \leq r \leq q \leq \infty$*. Então,*

$$
\|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot,t)\|_q \leq C_{\alpha,N} \sigma^{\frac{N}{2}\left[\frac{1}{r'}+\frac{1}{q}\right]-\frac{|\alpha|}{2}} t^{-\lambda-\frac{|\alpha|}{2}} \|\mathbf{u}_0\|_r, \quad \forall\, t > 0,
$$

onde $\lambda = \frac{N}{2}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right]$ *e* $C_{\alpha,N}$ *é uma constante positiva que depende somente do multi-índice* α *e* N*.*

Demonstração. O caso $q = \infty$ segue diretamente do Lema 4.11. Para $1 \leq r \leq q < \infty$, pelos Lemas 4.10 e 4.11, segue que

$$
\begin{aligned}
\|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot,t)\|_q^q &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |D^\alpha \mathbf{u}(\mathbf{x},t)|^{q-r} |D^\alpha \mathbf{u}(\mathbf{x},t)|^r\, d\mathbf{x} \\
&\leq \|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot,t)\|_\infty^{q-r} \|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot,t)\|_r^r \\
&\leq C_{\alpha,N}^{q-r} \sigma^{\left(\frac{N}{2r'}-\frac{|\alpha|}{2}\right)(q-r)} t^{\left(-\frac{N}{2r}-\frac{|\alpha|}{2}\right)(q-r)} \|\mathbf{u}_0\|_r^{q-r} C_{\alpha,N}^r \sigma^{\left(\frac{N}{2}-\frac{|\alpha|}{2}\right)r} t^{-\frac{|\alpha| r}{2}} \|\mathbf{u}_0\|_r^r \\
&= C_{\alpha,N}^q \sigma^{\frac{N}{2}\left(\frac{q-r}{r'}+r\right)-\frac{|\alpha| q}{2}} t^{-\frac{Nq}{2r}+\frac{N}{2}-\frac{|\alpha|}{2}q} \|\mathbf{u}_0\|_r^q
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot,t)\|_q \leq C_{\alpha,N} \sigma^{\frac{N}{2}\left[\frac{1}{r'}+\frac{1}{q}\right]-\frac{|\alpha|}{2}} t^{-\lambda-\frac{|\alpha|}{2}} \|\mathbf{u}_0\|_r,
$$

para todo $t > 0$ e $\lambda = \frac{N}{2}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right]$. □

Referências Bibliográficas

[1] H. BAE, *Leray's blow-up condition of the incompressible Navier-Stokes equations in* $\mathbb{R}^3$, unpublished note, University of California, Davis, CA, 2012.

[2] J. T. BEALE, T. KATO AND A. MAJDA, *Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations*, Comm. Math. Phys. 94(1984), 61-66.

[3] H. BEIRÃO DA VEIGA, *A sufficient condition on the pressure for the regularity of weak solutions to the Navier-Stokes equations*, J. Math. Fluid Mech. 2 (2000), 99-106.

[4] J. BENAMEUR, *On the blow-up criterion of 3D Navier-Stokes equations*, J. Math. Anal. Appl. 371 (2010), 719-727.

[5] P. BRAZ E SILVA, W. G. MELO AND P. R. ZINGANO, *Some remarks on the paper "On the blow-up criterion of 3D Navier-Stokes equations" by J. Benameur*, Comptes Rendus Math., **352** (2014), 913-915.

[6] P. BRAZ E SILVA, W. G. MELO AND P. R. ZINGANO, *Lower bounds on blow-up of solutions for Magneto-micropolar fluid systems in homogeneous Sobolev spaces*, preprint (2015).

[7] L. CAFFARELLI, R. KOHN AND L. NIRENBERG, *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math. 35 (1982), 771-831.

[8] R. E. CAFLISCH, I. KLAPPER, AND G. STEELE. *Remarks on singularities, dimension and energy dissipation for ideal hydrodynamics and MHD.* Communications in Mathematical Physics, 184(2):443-455, 1997.

[9] J.-Y. CHEMIN, *About Navier-Stokes Equations,* Publication du Laboratoire Jaques-Louis Lions, Université de Paris VI, (1996), R96023.

[10] P. Constantin and C. Fefferman, *Direction of vorticity and the problem of global regularity for the Navier-Stokes equations*, Indiana Univ. Math. J.42 (1993), 775-789.

[11] P. Constantin and C. Foias, *Navier-Stokes equations*, The University of Chicago Press, Chicago, 1988.

[12] M. Diego, M. G. Wilberclay, S. Lineia and Z. S. Juliana, *On the blow-up criterion of magnetohydrodynamics equations in homogeneous sobolev spaces.* arXiv:1506.01383v1, 2015.

[13] G. Duvaut and J.-L. Lions. *Inéquations en thermoélasticité et magnétohydrodynamique.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, 46:241-279, 1972.

[14] L. Esauriaza, G. Seregin and V. Sverk, *On $L_{3,\infty}$-solutions to the Navier-Stokes equations and backward uniqueness*, Uspekhi Mat. Nauk 58 (2003), 3-44.

[15] L. C. Evans, *Partial differential equations.* Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. xxii+749 pp.

[16] C. L. Fefferman, *Existence and smoothness of the Navier-Stokes equations*, in: A. Jaffe and A. Wiles (Eds.), The Millenium Prize Problems, American Mathematical Society, Providence, 2006, pp. 57-70. (Freely available electronically at http://www.claymath.org/millenium/Navier-Stokes Equations/NavierStokes.pdf.)

[17] G. P. Galdi, *An introduction to the Navier-Stokes initial-boundary problem*, in: G. P. Galdi, J. G. Heywood and R. Rannacher (Eds.), Fundamental Directions in Mathematical Fluid Dynamics, Birkhauser, Basel, 2000, pp. 1-70.

[18] G. P. Galdi, *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations*, vol. I, Springer, New York, 1994.

[19] D. Gilbarg and N. S. Trundinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order,* Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1977.

[20] Y. Giga, *Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system*, J. Diff. Eqs. 62 (1986), 186-212.

[21] P. L. Guidolin; *Contribuições para a Teoria de Equações do p-Laplaciano Evolutivo com Termos Advectivos*, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Setembro de 2015.

[22] C. HE AND Z. XIN. *On the regularity of weak solutions to the magnetohydrodynamic equations.* Journal of Differential Equations, 213(2):235-254, 2005.

[23] J. G. HEYWOOD, *Remarks on the possible global regularity of solutions of the three-dimensional Navier-Stokes equations*, in: G. P. Galdi, J. Malek and J. Necas (Eds.), Progress in Theoretical and Computational Fluid Mechanics, Longman, 1994, pp. 1-32.

[24] T. KATO, *Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions*, Math. Z. 187 (1984), 471-480.

[25] H.-O. KREISS, T. HAGSTROM, J. LORENZ AND P. R. ZINGANO, *Decay in time of the solutions of the Navier-Stokes equations for incompressible flows*, unpublished note, University of New Mexico, Albuquerque, NM, 2002.

[26] H.-O. KREISS AND J. LORENZ, *Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations*, Academic Press, New York, 1989. (Reprinted in the series SIAM Classics in Applied Mathematics, Vol. 47, 2004.)

[27] O. A. LADYZHENSKAYA, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach, New York, 1969.

[28] J. LERAY, *Essai sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math. 63 (1934), 193-248.

[29] M. C. LOPES FILHO, H. J. NUSSENZVEIG LOPES AND Y. ZHENG, *Weak solutions for the equations of incompressible and inviscid fluid dynamics*, IMPA, RJ, 1999.

[30] J. LORENZ AND W. G. MELO, *On the blow-up criterion of periodic solutions for micropolar equations in homogeneous Sobolev spaces.* Nonlinear Anal. Real World Appl. 27 (2016), 93-106.

[31] J. LORENZ AND P. R. ZINGANO. *The Navier-Stokes equations for incompressible flows: solution properties at potential blow-up times.* arXiv:1503.01767v1, 2015.

[32] A. MAJDA, *Smooth solutions for the equations of compressible and incompressible fluid flow*, in: H. Beirao da Veiga (Ed.), Fluid Dynamics: Varenna 1982, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1047, Springer, Berlin, 1984, pp. 75-126.

[33] C. MARCHIORO AND M. PULVIRENTI, *Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids*, Springer, New York, 1994.

[34] MASUDA, *Weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Tohoku Math. J. 36(1984), 623-646.

[35] W. G. MELO; *Existência de Soluções Clássicas para as Equações de Burgers e Navier-Stokes*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, Fevereiro de 2007.

[36] W. G. MELO; *The magneto-micropolar equations with periodic boundary conditions: Solution properties at potential blow-up times.* J. Math. Anal. Appl. 435 (2016), 1194-1209.

[37] L. NIRENBERG; *On elliptic partial differential equations. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 13 1959 115-162. (Reviewer: L. Garding) 35.00*

[38] J. C. RIGELO, *Decaimento Assíntótico de Escoamentos Viscosos Incompressíveis*, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Abril de 2007.

[39] J. C. ROBINSON, W. SADOWSKI AND R. P. SILVA, *Lower bounds on blow-up solutions of the three-dimensional Navier-Stokes equations in homogeneous Sobolev spaces*, J. Math. Phys. 53 (2012), 1-16.

[40] D. D. SCHNACK. *Lectures in Magnetohydrodynamics: With an Appendix on Extended MHD*, Lecture Notes in Physics 780. Springer, Berlin Heidelberg, 2009.

[41] M. E. SCHONBEK, T. P. SCHONBEK, AND E. SÜLI. *Large-time behaviour of solutions to the magnetohydrodynamics equations.* Mathematische Annalen, 304(4):717-756, 1996.

[42] G. SEREGIN, *A certain necessary condition of potential blow-up for Navier-Stokes equations*, Comm. Math. Phys. 312 (2012), 833-845.

[43] M. SERMANGE AND R. TEMAM. *Some mathematical questions related to the MHD equations.* Communications on Pure and Applied Mathematics, 36(5):635-664, 1983.

[44] J. SERRIN, *On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Arch. Rat. Mech. Anal. 9 (1962), 187-195.

[45] J. SERRIN, *The initial value problem for the Navier-Stokes equations*, in: R. Langer (Ed.), Nonlinear Problems, University of Wisconsin Press, Madison, 1963, pp. 69-98.

[46] H. SOHR, *The Navier-Stokes equations: an elementary functional analytic approach*, Birkhauser, Basel, 2001.

[47] R. Temam, *Navier-Stokes equations*, North-Holland, Amsterdam, 1977 (reprinted with corrections by the American Mathematical Society, Providence, 2001).

[48] J. Yuan. *Existence theorem and blow-up criterion of the strong solutions to the magneto-micropolar fluid equations.* Mathematical Methods in the Applied Sciences, 31(9):1113-1130, 2008.

[49] J. Yuan. *Existence theorem and regularity criteria for the generalized MHD equations.* Nonlinear Analysis. Real World Applications. An International Multidisciplinary Journal, 11(3):1640-1649, 2010.

[50] Y. Zhou. *Remarks on regularities for the 3D MHD equations.* Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A, 12(5):881-886, 2005.

[51] J. P. Zingano and P. R. Zingano, *A solution of the full Leray's problem for the Navier-Stokes equations in* $\mathbb{R}^3$, preprint (2016).